Е. И. Игнатьевъ.

ВЪ ЦАРСТВѢ СМЕКАЛКИ

или

АРИѲМЕТИКА ДЛЯ ВСѢХЪ.

КНИГА ДЛЯ СЕМЬИ И ШКОЛЫ.

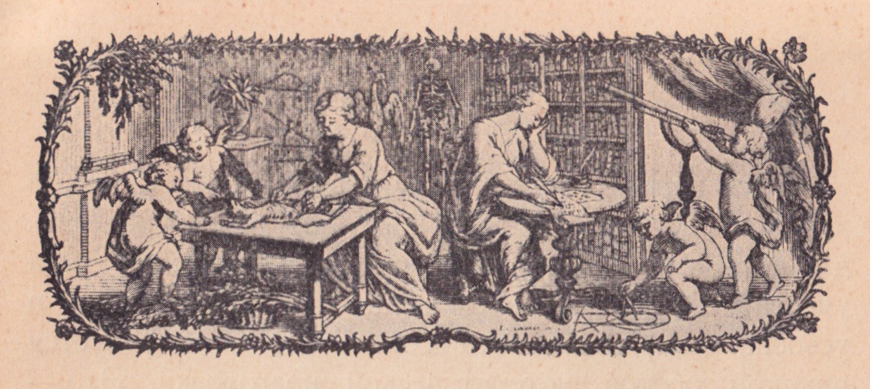
ОПЫТЪ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ХРЕСТОМАТІИ.

Книга 2-я.

ВТОРОЕ ПЕРЕСМОТРѢННОЕ И ИСПРАВЛЕННОЕ ИЗДАНІЕ.

С.-ПЕТЕРБУРГЪ
1912

Типографія А. С. Суворина. Эртелевъ, 13



Заставка изъ знаменитаго сочиненія Эйлера «Introductio in analysin infinitorum». Издано въ Лозаннѣ въ 1748 г.

ПРЕДИСЛОВІЕ КО 2-му ИЗДАНІЮ.

Въ настоящемъ изданіи по возможности устранены опечатки, вкравшіяся въ первое изданіе, а также шероховатости и неловкости въ изложеніи, которыя могли давать поводъ къ недоразумѣніямъ или двусмысленности въ пониманіи текста. Нѣкоторыя изъ погрѣшностей подобнаго рода были указаны въ критическихъ замѣткахъ, появившихся при первомъ изданіи второй книги «Въ царствѣ смекалки»; и за эти указанія составитель приноситъ рецензентамъ искреннюю благодарность. При остальныхъ исправленіяхъ дѣятельную и просвѣщенную помощь оказалъ В. И. Короленко, котораго составитель также проситъ принять увѣренія въ своей живѣйшей признательности.

С.-Петербургъ.
Ноябрь. 1911.

ИЗЪ ПРЕДИСЛОВІЯ КЪ 1-му ИЗДАНІЮ.

Какъ первая книга «Въ царствѣ смекалки», такъ и эта, надѣемся, можетъ послужить недурнымъ пособіемъ для математическаго саморазвитія, самодѣятельности и уясненія весьма важныхъ дисциплинъ. Для чтенія и усвоенія содержанія почти всей этой книги не требуется никакой особой математической подготовки. Это — *Ариѳметика для всѣхъ,* чувствующихъ желаніе и склонность къ работѣ ума. Здѣсь нѣтъ ничего или почти ничего, чего не осилилъ бы не только взрослый человѣкъ, но любой изъ юныхъ читателей, знакомый съ тѣми элементами математики, которые преподаются въ начальныхъ и среднихъ школахъ. Многое, если не все, можетъ здѣсь служить предметомъ бесѣдъ, развлеченій и занятій съ дѣтьми.

Но если по общимъ цѣлямъ эта книга есть продолженіе дѣла, начатаго въ первой, то она значительно разнится отъ предыдущей выполненіемъ. Такъ какъ предпринятый трудъ является у насъ чуть ли не единственнымъ, то въ первой части составитель не особенно заботился о «свѣжести», если можно такъ выразиться, и оригинальности, во что бы то ни стало, содержанія. Первая книга имѣла прежде всего въ виду ознакомить русскую семью и школу съ тѣмъ только самымъ извѣстнымъ и распространеннымъ матеріаломъ, что имѣетъ уже давно въ своемъ распоряженіи западная школа и семья. Вотъ почему въ первую книгу вошло довольно много такихъ задачъ и вопросовъ, которые иному знатоку могутъ показаться извѣстными и шаблонными. Впрочемъ, много ли у насъ такихъ знатоковъ?

Въ этой книгѣ, какъ читатель можетъ убѣдиться, мы поднимаемся на слѣдующую, высшую ступень. Съ

Introductio in analysin infinitorum. Лозанна, 1748.

одной стороны, значительно расширяется математическій кругозоръ, съ другой, болѣе тщательно и строго подбирается матеріалъ. Наряду съ легкостью, доступностью и возможной занимательностью изложенія составитель старается, гдѣ возможно, побудить чита-

теля и къ научному, теоретическому взгляду на предметъ. Выясняются основы понятія о числѣ, о свойствахъ и характерѣ алгебраическихъ и геометрическихъ аксіомъ, объ Евклидовой и не-Евклидовой геометріи, о «четвертомъ измѣреніи», о нѣкоторыхъ главнѣйшихъ результатахъ, достигнутыхъ математикой вообще, дѣлаются по возможности небольшія историческія справки. И читатель, конечно, не посѣтуетъ на насъ, если въ настоящей книгѣ мы, помимо общихъ указаній на значеніе и сущность трудовъ Н. И. Лобачевскаго, приводимъ даже его небольшую біографію. Великій свѣточъ русской математической мысли умеръ, непонятый современниками, но имѣетъ всѣ права, чтобы въ попыткѣ первой русской математической хрестоматіи отнеслись къ нему съ должной данью уваженія.

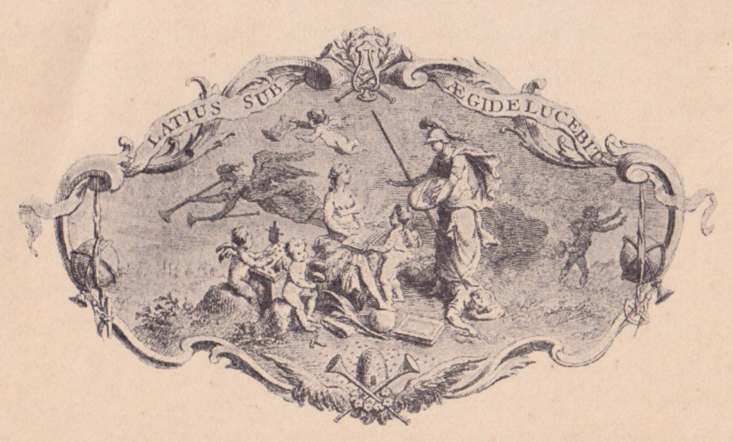
Быть можетъ, ничто такъ не изощряетъ и не оттачиваетъ въ извѣстномъ отношеніи математической смекалки, какъ умѣнье разбираться въ такъ называемыхъ «математическихъ софизмахъ» и парадоксахъ. Жаль только, что въ имѣющихся у насъ книжкахъ съ попытками подобнаго сорта предлагаются просто самыя задачи безъ общаго, хотя бы, разъясненія сущности софизма. Вотъ почему этому предмету, помимо задачъ, посвящены и главы общаго содержанія. Думаемъ, что даже для знатоковъ софизмовъ онѣ не будутъ лишними. Не безъ интереса также, полагаемъ, отнесется читатель къ попыткамъ беллетристической обработки чисто математическихъ темъ. Помимо Э. По и Г. Уэльса, читатель найдетъ здѣсь главу «Въ странѣ чудесъ математики», составленную по мало извѣстной у насъ книгѣ Abbott, E. A.: «Flatland; a Romance of Many Dimensions by a Square».

Иному, пожалуй, покажется страннымъ найти въ концѣ книги нѣсколько страницъ, посвященныхъ извѣст-

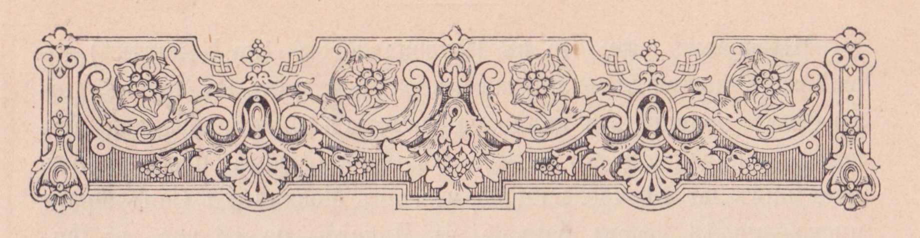
наго рода «математическимъ фокусамъ». На это замѣтимъ, что въ область смекалки входитъ также умѣнье разбираться, продѣлываютъ ли предъ вами просто фокусъ, или же дѣйствительную математическую комбинацію.

Въ заключенiе считаю долгомъ поблагодарить ученаго лѣсовода Я. И. Перельмана за ту готовность, съ которой онъ дѣлился со мной своими задачами, знанiями и опытомъ при составленiи этой книги. Ему же здѣсь принадлежитъ обработка главы «Математика въ природѣ» и «Новый родъ задачъ». Давнишнему своему прiятелю и товарищу по факультету, Н. П. Соколову, тоже приношу здѣсь свою благодарность за сдѣланный пересмотръ и дополненiя главы «Новыя начала Геометрiи». Единственная попытка изложить кратко и популярно замѣчательный мемуаръ Н. И. Лобачевскаго принадлежитъ ему. Съ тѣмъ большимъ удовольствiемъ беремъ изъ его брошюры эту главу въ его собственной переработкѣ для настоящей книги.

Августъ. 1909 г.
С.-Петербургъ.



Introductio in analysin infinitorum. Лозанна, 1748.



Задача 1-я.

Гдѣ начинается новый годъ?

Обыкновенно спрашиваютъ, **когда** начинается новый годъ, и мало кто задается вопросомъ: **гдѣ** онъ начинается? Вопросъ этотъ, пожалуй, можетъ даже показаться нелѣпымъ, какой-то задачей-шуткой, въ родѣ вопросовъ: почему (по чему) птица летаетъ, или отчего (отъ чего) утка плаваетъ? Кажется яснымъ, что новый годъ начинается тамъ, гдѣ онъ начинается, и спрашивать тутъ собственно не о чемъ.

Однако, дѣло не такъ-то просто, какъ кажется, и вопросъ— гдѣ, въ какомъ пунктѣ земного шара впервые наступаетъ новый годъ, имѣетъ вполнѣ опредѣленный смыслъ.

Допустимъ, что вы встрѣчаете новый годъ въ Москвѣ. Вотъ бьетъ двѣнадцать часовъ: въ этотъ моментъ въ Москвѣ наступилъ новый годъ. Но мы знаемъ, что наши нижегородскіе знакомые уже полчаса какъ встрѣтили новый годъ, такъ какъ въ Нижнемъ часы показываютъ половину перваго, когда въ Москвѣ двѣнадцать. Въ Омскѣ новый годъ встрѣтили еще $2^1/_2$ ч. тому назадъ, въ Красноярскѣ—цѣлыхъ 4 часа тому назадъ, а въ Петропавловскѣ—даже на цѣлыхъ 8 часовъ ранѣе. Слѣдовательно, вы сейчасъ встрѣтили въ Москвѣ вовсе ужъ не **новый** годъ: вѣдь ему уже, по меньшей мѣрѣ, девять часовъ, этому новому году!

Итакъ, новый годъ начался гдѣ-то далеко на востокѣ и оттуда пришелъ къ намъ. Но гдѣ, въ какомъ мѣстѣ земного шара онъ впервые явился? Такой вопросъ, какъ мы видимъ, имѣетъ опредѣленный смыслъ. И на него надо умѣть отвѣтить.

Мы знаемъ уже, что въ Петропавловскѣ (на Камчаткѣ) новый годъ наступилъ на 8 часовъ раньше, чѣмъ въ Москвѣ. Попробуемъ подвигаться далѣе на востокъ и попытаемся отыскать, гдѣ онъ начался всего ранѣе. Въ Беринговомъ проливѣ онъ наступилъ на 11 час. раньше, чѣмъ въ Москвѣ. Въ Санъ-Франциско—на 14 часовъ раньше, въ Чикаго—на 16 час., въ Филадельфіи—на 17 час., въ Лондонѣ—на 20 час., въ Парижѣ—почти на 22 часа, въ Вѣнѣ—на 23 часа и, наконецъ, въ Москвѣ на 24 часа!

Мы пришли къ абсурдному выводу, что въ Москвѣ новый годъ наступаетъ на 24 часа раньше, чѣмъ въ той же Москвѣ!

Недоумѣніе наше еще болѣе возрастетъ, если мы будемъ двигаться отъ Москвы на западъ. Въ тотъ моментъ, когда въ Москвѣ только что наступилъ новый годъ, въ Петербургѣ всего половина двѣнадцатаго, т. е. тамъ еще старый годъ. Идя все далѣе и далѣе на западъ, мы, наконецъ, прибудемъ снова въ Москву,—и окажется, что тамъ одновременно долженъ быть и старый и новый годъ. Получается опять нелѣпость,— что въ Москвѣ новый годъ наступаетъ и въ данный моментъ, и на 24 часа ранѣе, и на 24 часа позднѣе.

Очевидно, все это происходитъ вслѣдствіе того, что Земля—шаръ. Однако же мы знаемъ, что въ Москвѣ новый годъ наступаетъ въ вполнѣ опредѣленный моментъ, и слѣдовательно наше разсужденіе чѣмъ-нибудь да грѣшитъ, разъ мы пришли къ выводу, что на одномъ и томъ же пунктѣ новый годъ наступаетъ три дня кряду.

Не трудно догадаться, въ чемъ тутъ промахъ. Разъ въ данный моментъ къ востоку отъ Москвы новый годъ, а къ западу отъ нея пока еще старый годъ, то вслѣдствіе шарообразности Земли должна существовать гдѣ-то пограничная линія, раздѣляющая область съ старымъ годомъ отъ области съ новымъ годомъ.

Такая пограничная линія на самомъ дѣлѣ и существуетъ; положеніе ея опредѣляется не какими-нибудь астрономическими условіями, а просто **практикою мореплаванія.**

Дѣло въ томъ, что затрудненія, съ которыми мы сейчасъ встрѣтились, возникаютъ не только въ этомъ случаѣ, но и тогда,

когда ищутъ начала счета любого дня недѣли. Разсужденіями вполнѣ сходными съ только что приведенными, легко убѣдиться, что гдѣ-то на земномъ шарѣ должна существовать линія, по одну сторону которой будетъ опредѣленный день недѣли,—например, среда, а по другую—слѣдующій, четвергъ.

Практическая же надобность въ установленіи подобной границы, или такъ называемой **демаркаціонной** линіи, возникла изъ необходимости регулировать веденіе календаря во время плаваній. Извѣстно, что при кругосвѣтныхъ путешествіяхъ съ запада на востокъ одинъ день какъ бы выигрывается, и путешественникъ, прибывъ въ исходный пунктъ, считаетъ на день болѣе, чѣмъ слѣдуетъ; при путешествіи же съ востока на западъ наблюдается обратное: путешественникъ въ счетѣ дней отстаетъ отъ истиннаго, какъ бы теряетъ однѣ сутки. Причину этого на первый взглядъ непонятнаго явленія легко раскрыть, если принять во вниманіе, что кругосвѣтный путешественникъ дѣлаетъ одинъ лишній оборотъ вокругъ земной оси — при движеніи на востокъ и, напротивъ, дѣлаетъ однимъ оборотомъ менѣе—при движеніи на западъ [1]). Другими словами, путешественникъ въ первомъ случаѣ увидитъ восходъ солнца однимъ разомъ болѣе, во второмъ—менѣе, нежели прочіе люди, остающіеся на мѣстѣ. А если онъ увидитъ однимъ восходомъ солнца болѣе или менѣе, то, слѣдовательно, будетъ насчитывать въ протекшемъ времени однѣми сутками болѣе или же менѣе. Мы знаемъ, что только благодаря этому Филеасъ Фоггъ, герой романа Жюля Верна «80 дней вокругъ свѣта», выигралъ свое оригинальное пари.

Впервые указанная особенность въ счетѣ дней при кругосвѣтныхъ путешествіяхъ стала извѣстна послѣ перваго кругосвѣтнаго плаванія Магеллана. Спутникъ погибшаго Магеллана, Себастіанъ-дель-Кано, при возвращеніи въ Европу «привезъ съ собой» четвергъ, въ то время какъ здѣсь была уже пятница (онъ ѣхалъ съ востока на западъ).

---

[1]) Напомнимъ, что такъ какъ **кажущееся** суточное движеніе Солнца совершается съ востока на западъ, то **истинное вращеніе Земли** вокругъ своей оси происходитъ въ обратномъ направленіи, то-есть съ запада на востокъ.

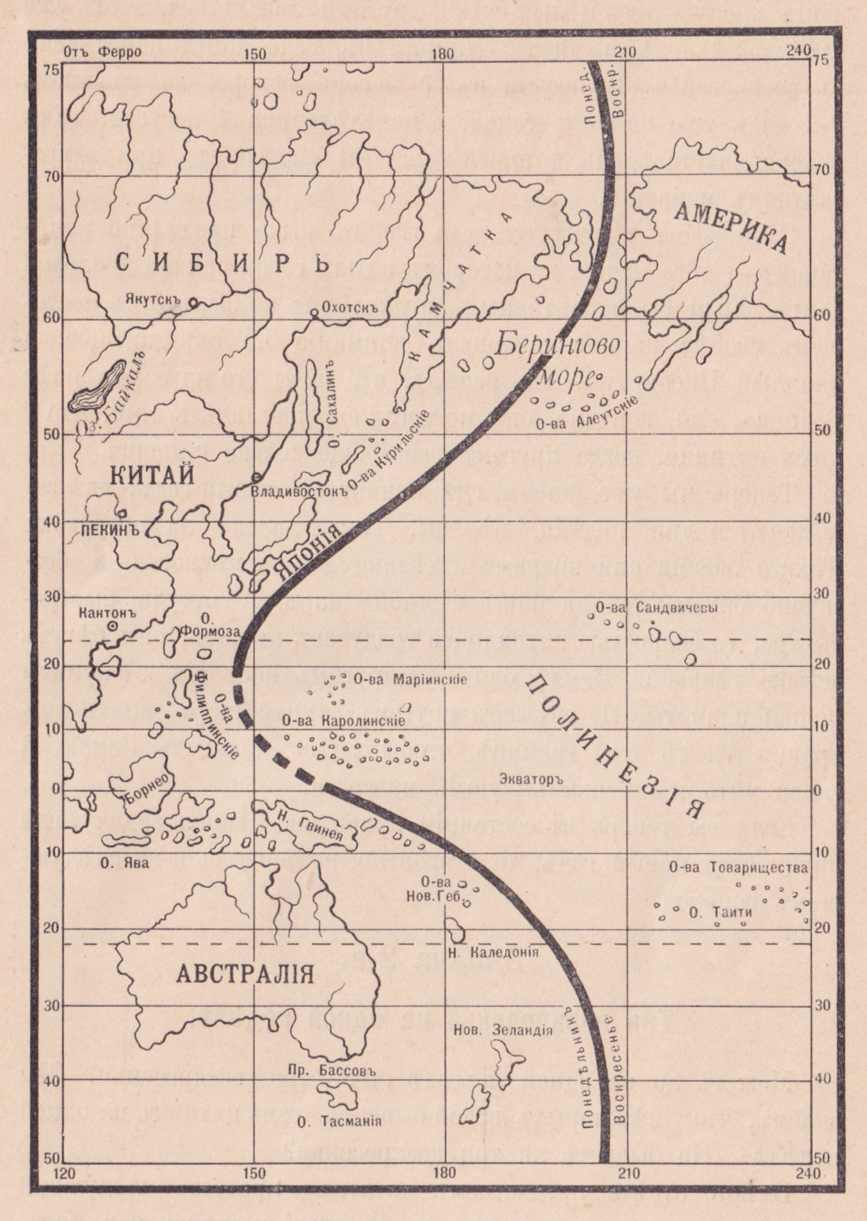
Съ этого времени мореплаватели начали постепенно устанавливать демаркаціонную линію, положеніе которой и теперь еще опредѣлено не во всѣхъ пунктахъ. Линія эта, ограничивающая области съ различными днями недѣли, слѣдуетъ по западной части Великаго океана. Она проходитъ черезъ Беринговъ проливъ, затѣмъ направляется къ берегамъ Японіи, огибаетъ съ запада острова Маріанскіе и Каролинскіе и идетъ далѣе къ югу, огибая съ востока Филиппины, Новую Гвинею, Австралійскій материкъ, Новую Каледонію и Новую Зеландію (см. карту фиг. 1).

Такимъ образомъ, когда на Филиппинскихъ островахъ, скажемъ, четвергъ, тогда на сосѣднихъ съ ними Каролинскихъ, всего въ полусотнѣ верстъ, тотъ же день называется средой. Произошло это просто потому, что Филиппины были открыты голландскими мореплавателями, прибывшими **съ востока**, а Каролинскіе о-ва открыты испанцами, отправлявшимися къ путь изъ Европы **на западъ,** черезъ Атлантическій океанъ, мимо Южной Америки, и черезъ Великій океанъ.

Разсматривая карту, мы видимъ также, что подобная же разница въ счетѣ дней недѣли наблюдается и между Камчаткой и Аляской: когда на Камчаткѣ понедѣльникъ, на Аляскѣ воскресенье.

Понятно, что это вносило бы невѣроятную путаницу въ календарь и вызвало бы значительныя неудобства, если бы демаркаціонная линія проходила не черезъ водныя пустыни Тихаго океана, а черезъ материки Европы или Америки.

Но какимъ же образомъ эта демаркаціонная линія помогаетъ мореплавателямъ регулировать календарь? Вотъ какимъ. Когда судно пересѣкаетъ эту линію съ **запада на востокъ**, то слѣдующій день и число мѣсяца считаютъ за предыдущіе, т. е. **дважды считаютъ одинъ и тотъ же день** недѣли и число мѣсяца. Если, напримѣръ, демаркаціонная линія была пересѣчена въ среду 14 мая, то и слѣдующій день считаютъ за среду 14 мая. Въ судовой книгѣ, такимъ образомъ, на этой недѣлѣ будутъ двѣ среды и два раза подрядъ 14 мая. Благодаря этому уничтожается лишній день, который «выигрывается» при путешествіи съ запада на востокъ. Наоборотъ, когда судно пересѣкаетъ де-



Фиг. 1. Гдѣ начинается новый годъ?—Положеніе демаркаціонной линіи.

маркаціонную линію съ **востока на западъ**, то послѣ пересѣченія пропускаютъ цѣлыя сутки, другими словами, считаютъ уже слѣдующій день и число. Напримѣръ, если линія пересѣчена въ воскресенье 3 августа въ 7 часовъ вечера, то считаютъ 8-й часъ уже не воскресенья, а понедѣльника 4 августа. Такъ наверстывается день, который былъ бы «потерянъ» при кругосвѣтномъ плаваніи.

Само собою разумѣется, что все это было продѣлано капитаномъ и того судна, на которомъ плылъ герой романа Филеасъ Фоггъ. Если бы педантичный англичанинъ не былъ такъ поглощенъ своимъ пари и обращалъ вниманіе на окружающее, а наивный Паспарту не воображалъ, что часы его идутъ «вѣрнѣе Солнца»,—то, конечно, они не могли бы проглядѣть того, что у нихъ пятница, когда кругомъ всего еще только четвергъ.

Теперь мы уже знаемъ, **гдѣ** начинается новый годъ, **гдѣ** зарождаются дни, недѣли, мѣсяцы. Тамъ, далеко, на островахъ Тихаго океана они впервые отдѣляются отъ вѣчности и беззвучно опускаются на нашъ земной шаръ. А оттуда быстро-быстро, со скоростью пятнадцати градусовъ въ часъ, они бѣгутъ легкою тѣнью по Землѣ, одинъ за другимъ, посѣщая всѣ пункты нашей планеты. И, обѣжавъ кругомъ земной шаръ, опять возвращаются къ этой границѣ, чтобы здѣсь покинуть Землю и снова уйти въ вѣчность—увы!.. навсегда.

Если вы теперь въ состояніи правильно рѣшить задачу, гдѣ начинается новый годъ, то, вѣроятно, разберетесь и въ слѣдующемъ вопросѣ.

Задача 2-я.

Три воскресенья на одной недѣлѣ.

Можетъ ли на одной недѣлѣ быть три воскресенья? Мы знаемъ, что у нѣкоторыхъ людей бываетъ «семь пятницъ на одной недѣлѣ». Но бываетъ ли три воскресенья?

Вмѣсто отвѣта предлагаемъ читателю прочесть слѣдующій небольшой остроумный разсказъ знаменитаго американскаго писателя Эдгара По,—разсказъ, который мало кому извѣстенъ и который такъ и называется:

«Три воскресенья на одной недѣлѣ».

«Ахъ ты, упрямый старикашка!» — мысленно обратился я однажды къ дядѣ Ремгеджеру, гнѣвно сжавъ кулакъ (тоже, впрочемъ, лишь въ мысляхъ).

Да, только мысленно. На самомъ дѣлѣ то, что я думалъ, нѣсколько отличалось отъ того, что я дѣйствительно исполнилъ. Когда я открылъ дверь въ комнату дяди, старикъ сидѣлъ, вытянувъ ноги къ камину, держа кружку съ пивомъ въ рукахъ, и добросовѣстнѣйшимъ образомъ исполнялъ совѣтъ старой пѣсни:

Наполняй пустой бокалъ,
Полный—выпивай до дна!

— Дорогой дядя,—началъ я, тихо притворивъ дверь его комнаты и подходя къ нему съ умильной миной,—вы всегда были ко мнѣ такъ расположены и столько разъ доказали свою доброту, что я не сомнѣваюсь въ вашей помощи и на этотъ разъ.

— Продолжай, мальчикъ, продолжай!—процѣдилъ дядя.

— Я убѣжденъ, дорогой дядя (чтобъ тебя, стараго скрягу!), что вы не станете серьезно противиться моей женитьбѣ на Кэтъ. Вы вѣдь только шутили, не правда ли? О, вы такой шутникъ, дядюшка, ха-ха-ха!

— Ха-ха-ха!—подхватилъ дядя.—Вотъ это правда, чортъ побери!

— Ну, вотъ, я такъ и зналъ! А теперь, дорогой дядя, я и Кэтъ ждемъ отъ васъ только указанія... относительно срока... Словомъ сказать, дорогой дядюшка, на когда, по вашему мнѣнію, всего удобнѣе будетъ назначить нашу свадьбу?

— Свадьбу? Какую? Вотъ еще новости! И думать не смѣй объ этомъ!

— Ха-ха-ха! Хо-хо-хо!.. Хи-хи-хи-хи... Это славно! Милый дядюшка, какой вы весельчакъ! Теперь остается только точно назначить день.

— А? Точно назначить?

— Да, дядюшка, если будете такъ добры...

— Ты хочешь точно знать срокъ? Хорошо, Бобби, такъ и быть, ублаготворю тебя.

— Ахъ, милый дядюшка!..

— Погоди. Итакъ, я изъявляю полное согласіе. Сегодня воскресенье, да? Хорошо-съ. Такъ слушай же: можешь вѣнчаться съ Кэтъ, ну, когда бы?.. Когда будетъ три воскресенья сряду на одной недѣлѣ! Чего ты глаза выпучилъ? Говорю же тебѣ: свадьба твоя будетъ, когда три воскресенья придутъ сряду на одной недѣлѣ. Ни однимъ днемъ раньше! Ты знаешь меня, слово мое неизмѣнно. А теперь проваливай!

И онъ снова принялся за свое пиво. Я же въ отчаяніи выбѣжалъ изъ комнаты.

Дядя мой, Ремгеджеръ, былъ, что называется, очень милый старичокъ, но имѣлъ свои странности. Будучи добродушенъ по натурѣ, онъ, благодаря страсти противорѣчить, пріобрѣлъ среди многихъ, не знавшихъ его близко, репутацію скряги. Въ него словно вселился бѣсъ отрицанія, и на каждый вопросъ онъ спѣшилъ отвѣтить «нѣтъ!» Но въ концѣ концовъ, послѣ долгихъ переговоровъ, никогда почти не случалось, чтобы просьба оставалась неисполненной. Мало кто дѣлалъ столько добра, сколько дѣлалъ онъ—и въ то же время такъ неохотно, какъ онъ.

Оставшись сиротой послѣ смерти своихъ родителей, я все время воспитывался и жилъ у старика дяди. Можетъ быть, посвоему чудакъ и любилъ меня, хотя не такъ, какъ свою внучку Кэтъ. Съ перваго же года онъ частенько дралъ меня, съ пяти лѣтъ до пятнадцати — стращалъ исправительнымъ домомъ; съ пятнадцати до двадцати—ежедневно грозилъ выгнать меня безъ копѣйки денегъ. Зато я имѣлъ вѣрнаго друга въ Кэтъ. Она была прелестная дѣвушка и премило заявила мнѣ, что станетъ моей, со всѣмъ своимъ приданымъ, какъ только я уговорю ея дѣдушку Ремгеджера. Бѣдняжкѣ было всего шестнадцать лѣтъ, и до совершеннолѣтія она не въ правѣ была распоряжаться своимъ капиталомъ безъ согласія дѣда. Но дѣдушка оставался непоколебимъ, несмотря на всѣ наши мольбы. Самъ библейскій Іовъ возропталъ бы при видѣ того, какъ онъ издѣвался надъ нами, словно котъ надъ мышами. Въ глубинѣ души дядушка былъ доволенъ нашимъ рѣшеніемъ и охотно выложилъ бы десять тысячъ фунтовъ изъ собственныхъ средствъ, если бы Кэтъ не имѣла приданаго. Но ему нуженъ былъ благовидный

предлогъ, чтобы уступить нашимъ мольбамъ. Наша ошибка состояла въ томъ, что мы вздумали сами хлопотать о своей свадьбѣ, а при такихъ обстоятельствахъ дѣдушка положительно не въ силахъ былъ не оказать намъ противодѣйствія.

Дядя считалъ безчестіемъ отступать отъ разъ даннаго слова но за то готовъ былъ толковать смыслъ вкривь и вкось, лишь бы остаться вѣрнымъ буквѣ. Вотъ этой чертой и воспользовалась лукавая Кэтъ вскорѣ послѣ моего знаменательнаго разговора съ дядей.

Разскажу вкратцѣ, какъ это произошло. Судьбѣ угодно было, чтобы среди знакомыхъ моей невѣсты были два моряка, недавно возвратившіеся въ Англію послѣ кругосвѣтнаго плаванія. Недѣли черезъ три послѣ памятнаго разговора, въ воскресенье послѣ обѣда я вмѣстѣ съ этими моряками зашелъ къ дядѣ въ гости. Около получаса мы говорили о разныхъ безразличныхъ вещахъ, пока разговоръ нашъ не принялъ такое направленіе:

капитанъ пратъ. Цѣлый годъ пробылъ я въ плаваніи. Ей-Богу, сегодня какъ разъ годовщина моего отъѣзда. Помните, м-ръ Ремгеджеръ, какъ я пришелъ къ вамъ прощаться ровнехонько годъ тому назадъ? И замѣчательно, что тутъ же сидитъ нашъ пріятель Смисертонъ, который тоже вѣдь проплавалъ цѣлый годъ.

капитанъ смисертонъ. Да, годъ безъ малаго. Помните, м-ръ Ремгеджеръ, какъ я зашелъ къ вамъ проститься?

дядя. Еще бы! Въ самомъ дѣлѣ поразительно—оба вы пропадали ровно годъ. Замѣчательное совпаданіе.

кэтъ. Тѣмъ болѣе, что капитанъ Пратъ и капитанъ Смисертонъ ѣхали совсѣмъ разными путями: первый обогнулъ мысъ Доброй Надежды, а второй—мысъ Горнъ.

дядя. Вотъ именно. Одинъ держалъ путь на востокъ, другой—на западъ, и оба ѣхали кругомъ земного шара.

я [быстро]. Не зайдете ли, господа, завтра посидѣть съ нами вечеркомъ? Поговорили бы о вашихъ странствованіяхъ, сыграли бы въ вистъ и...

капитанъ пратъ. Въ вистъ? Вы вѣрно забыли, что **завтра** воскресенье. Въ другой день я готовъ...

кэть. Да что вы? Робертъ не такой ужъ грѣшникъ. Вѣдь, воскресенье-то **сегодня!**

дядя. Ну, конечно.

капитанъ смисертонъ. О чемъ тутъ спорить, господа. Да, вѣдь, **вчера же** было воскресенье!

дядя. Воскресенье сегодня. Не понимаю, какъ можно этого не знать!

капитанъ пратъ. Ничуть не бывало! Воскресенье завтра!

капитанъ смисертонъ. Да вы, господа, съ ума сошли, право! Воскресенье было вчера,—я такъ же увѣренъ въ этомъ, какъ и въ томъ, что сижу здѣсь передъ вами!

кэть [громко]. Ну, дѣдушка, теперь вы попались! Капитанъ Смисертонъ утверждаетъ, что воскресенье было вчера — и онъ правъ. Кузенъ Бобби, вы и я утверждаемъ, что воскресенье сегодня—и мы правы. Капитанъ Пратъ заявляетъ, что воскресенье завтра—и онъ тоже правъ. Мы всѣ правы, и вотъ вамъ три воскресенья на одной недѣлѣ!

капитанъ смисертонъ [послѣ паузы]. Кэтъ разсудила правильно. Какіе мы съ тобою дураки, Пратъ! Дѣло, видите ли, вотъ въ чемъ, м-ръ Ремгеджеръ. Земля имѣетъ въ окружности, какъ вы знаете, 24 тыс. миль и обращается вокругъ оси, съ запада на востокъ, дѣлая полный оборотъ въ 24 часа. На одинъ часъ приходится, слѣдовательно, тысяча миль. Такъ вѣдь?

дядя. Разумѣется, такъ.

капитанъ смисертонъ. Теперь вообразите, что я отплываю на тысячу миль **къ востоку** отсюда. Легко понять, что я долженъ буду увидѣть восходъ солнца ровно на часъ раньше, нежели вы здѣсь, въ Лондонѣ. Если я въ томъ же направленіи проѣду еще тысячу миль, то увижу солнце на два часа раньше васъ; еще черезъ тысячу миль—на три часа и т. д., пока не объѣду кругомъ всего земного шара и снова не вернусь сюда. И здѣсь, проѣхавъ 24 тысячи миль, я увижу восходъ солнца на цѣлыя сутки раньше, нежели вы; другими словами—я буду считать на одни сутки меньше, нежели вы. Другое дѣло капитанъ Пратъ: проѣхавъ тысячу миль **къ западу,** онъ видѣлъ восходъ солнца часомъ позднѣе васъ; а проѣхавъ всѣ 24 тысячи миль, отсталъ отъ Лондона въ счетѣ времени

на цѣлыя сутки. И вотъ почему для меня воскресенье было вчера, для васъ—сегодня, а дла м-ра Прата—будетъ завтра. Очевидно, мы всѣ правы, и нѣтъ основаній считать, что кто нибудь изъ насъ болѣе правъ, нежели другіе.

дядя. И то правда! Ну, Кэтъ и Бобби, торжествуйте, я попался. Но я никогда не измѣняю своему слову. И если три воскресенья случились на одной недѣлѣ, то знай, мальчуганъ, что можешь получить приданое и все прочее, когда хочешь. Дѣло въ шляпѣ, чортъ побери!

На этомъ разсказъ По кончается. Выходитъ, стало быть, что на одной недѣлѣ возможны три воскресенья кряду. На самомъ же дѣлѣ моряки провели упрямаго дядю, который, вѣроятно, не слишкомъ силенъ былъ въ астрономіи. Объясненія капитана Смисертона совершенно правильны, но онъ умолчалъ объ одномъ важномъ обстоятельствѣ: о поправкѣ календаря при пересѣченіи демаркаціонной линіи. Пересѣкая ее на своихъ судахъ во время плаванія, капитанъ Пратъ долженъ былъ одинъ день считать дважды, а капитанъ Смисертонъ—одинъ день пропустить; вслѣдствіе этого возстановилось бы единство времяисчисленія, какъ мы это уже знаемъ изъ предшествующей главы.

Но, строго говоря, изъ той же главы мы должны заключить, что на одной недѣлѣ, все же, можетъ быть **два** воскресенья или **ни одного**. По крайней мѣрѣ—запись подобнаго рода можетъ встрѣтиться въ судовомъ журналѣ любого судна, пересѣкшаго демаркаціонную линію...

Задача 3-я.

Опредѣленіе направленія съ помощью карманныхъ часовъ.

Съ помощью карманныхъ часовъ въ солнечный день можно опредѣлить всегда съ достаточной для житейской практики точностью всѣ четыре «страны свѣта», т. е. точки сѣвера, юга, востока и запада горизонта. Способъ этотъ настолько простъ и легко объяснимъ, что остается только ожидать въ скоромъ времени его всеобщаго распространенія. Опредѣленіе направленія заключается въ слѣдующемъ.

Повернуть циферблатъ карманныхъ часовъ, держа ихъ горизонтально такъ, чтобы часовая стрѣлка была направлена въ сторону Солнца. Тогда точка на окружности циферблата, лежащая посрединѣ между показаніемъ часовой стрѣлки въ этотъ моментъ и числомъ XII, покажетъ вамъ направленіе къ югу.

Такъ, напримѣръ, если часовая стрѣлка показываетъ 4 часа, то, направивъ ее къ Солнцу, найдемъ, что средняя точка между показаніемъ часовъ (4) и XII-ю будетъ совпадать съ точкой циферблата, указывающей **два** часа. Эта точка и опредѣлитъ **югъ** горизонта, противоположная ей по направленію дастъ сѣверъ, налѣво, слѣдовательно, будетъ востокъ, а направо — западъ.

Предыдущее правило можно свести и на такое:

Найти на окружности циферблата среднюю точку между показаніемъ часовой стрѣлки и точкой XII-ти часовъ; направить эту среднюю точку къ Солнцу,— тогда точка циферблата съ отмѣткой двѣнадцати часовъ и укажетъ южное направленіе.

Если часы, напр., указываютъ 4 часа, то направить точку циферблата съ показаніемъ II часа на Солнце. Тогда линія, проведенная изъ центра часовъ къ XII-ти, и будетъ полуденной линіей, т. е. направленной къ югу.

Доказательство.

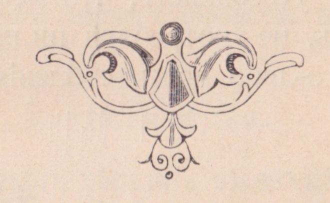
Для доказательства стоитъ только вспомнить, что въ 12 часовъ (полдень) Солнце, часовая стрѣлка и точка на циферблатѣ, отмѣченная цифрой XII,— всѣ они лежатъ въ одной линіи, направленной къ югу («на полдень»). Вслѣдъ затѣмъ и Солнце, и часовая стрѣлка двигаются въ одинаковомъ направленіи. Но стрѣлка часовъ совершаетъ свой полный оборотъ въ 12 часовъ, а Солнце въ 24 часа, т. е. въ вдвое большій промежутокъ времени. Отсюда и вытекаютъ данныя выше правила.

Замѣчаніе. Само собою разумѣется, что полученное указаннымъ путемъ опредѣленіе направленія не будетъ **вполнѣ** точно.

Ошибка получается потому, что мы помѣщаемъ часы въ плоскости горизонта, вмѣсто плоскости эклиптики, и кромѣ того не принимается во вниманіе разница между истиннымъ солнечнымъ временемъ и такъ называемымъ среднимъ временемъ. Но для тѣхъ чисто практическихъ цѣлей, которыя преслѣдуются при примѣненіи указаннаго выше правила, получаемые результаты совершенно достаточны.

Если бы вмѣсто сѣвернаго мы находились на южномъ полушаріи Земли, то указанное выше правило соотвѣтственно видоизмѣнилось бы,—а именно въ этомъ случаѣ:

Если точку, обозначенную на циферблатѣ часовъ числомъ XII, повернуть къ Солнцу, то равнодѣлящая угла между показаніемъ часовой стрѣлки и точкой съ числомъ 12 покажетъ направленіе къ сѣверу.



Задача 4-я.

Сколько воды въ бочкѣ?

Двое заспорили о содержимомъ бочки. Одинъ спорщикъ говорилъ, что воды въ бочкѣ болѣе, чѣмъ на половину, а другой утверждалъ, что меньше. Какъ убѣдиться, кто правъ, не употребляя ни палки, ни веревки, ни вообще какого-либо приспособленія для измѣренія?

Фиг. 2.

Рѣшеніе.

Это не задача-шутка, а настоящая геометрическая задача, хотя и рѣшается до смѣшного просто. Рѣшенія подобнаго рода задачъ заслуживаютъ всегда того, чтобы надъ ними подумать.

Вотъ рѣшеніе этой задачи. Если бы вода въ бочкѣ была налита ровно до половины, то, **наклонивъ** бочку такъ, чтобы уровень воды пришелся какъ разъ у края бочки, мы увидѣли бы, что высшая точка **дна** находится также на уровнѣ воды. Это ясно изъ того, что плоскость, проведенная черезъ діаметрально противоположныя точки верхней и нижней окружностей бочки, дѣлитъ ее на двѣ равныя части. Если вода налита менѣе чѣмъ до половины, то при такомъ же наклоненіи бочки долженъ выступить изъ воды большій или меньшій сегментъ дна. Наконецъ, если воды въ бочкѣ болѣе чѣмъ половина, то при наклоненіи верхняя часть дна окажется подъ водой.

Такимъ образомъ вопросъ рѣшается правильно безъ всякихъ измѣреній.

Задача 5-я.

Крестъ обратить въ квадратъ.

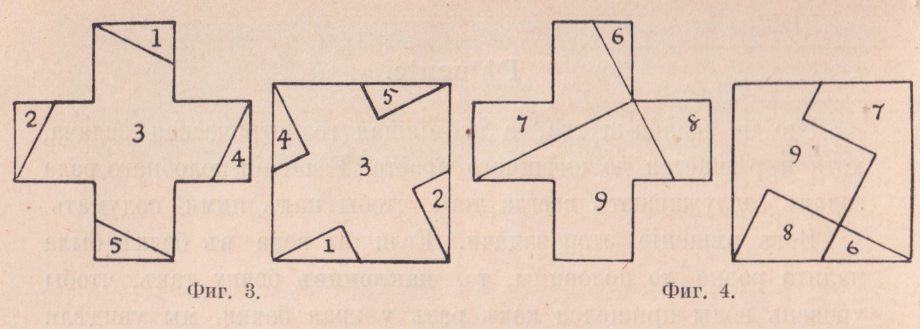
Крестъ, составленный изъ пяти квадратовъ, требуется разрѣзать на такія части, изъ которыхъ можно было бы составить одинъ равновеликій кресту по площади квадратъ?

Рѣшеніе.

На прилагаемыхъ чертежахъ читатель найдетъ два рѣшенія этой задачи: одно старое [1]) (фиг. 3) и одно, предложенное въ новѣйшее время (фиг. 4). Второе рѣшеніе столь же просто, сколь и остроумно: задача рѣшается проведеніемъ всего двухъ прямыхъ линій.

---

[1]) Ср. задачу 64-ую 1-й книги настоящей Хрестоматіи.

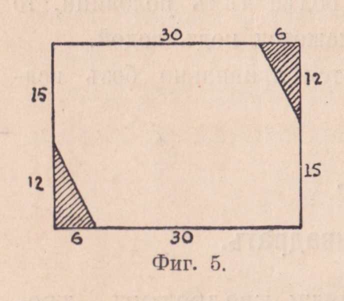


Фиг. 3. Фиг. 4.

Задача 6-я.

Коврикъ.

У одной дамы былъ прямоугольный коврикъ размѣрами 36×27 дюймовъ. Два противоположныхъ угла его истрепались, — пришлось ихъ отрѣзать въ видѣ треугольныхъ лоскутковъ, затушеванныхъ на нашемъ чертежѣ (фиг. 5). Но дамѣ все же хотѣлось имѣть коврикъ въ формѣ прямоугольника. Она поручила обойщику разрѣзать его на такія двѣ части, чтобы изъ нихъ можно было сшить прямоугольникъ, не теряя, конечно, ни кусочка матеріи. Обойщикъ исполнилъ желаніе дамы.

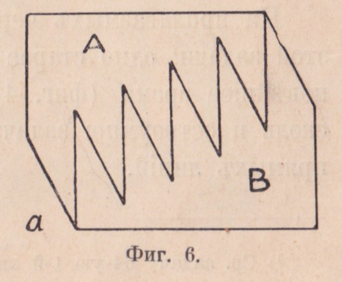


Фиг. 5.

Спрашивается, какъ ему удалось это сдѣлать?

Рѣшеніе.

Рѣшеніе задачи видно изъ прилагаемаго чертежа (фиг. 6). Если зубчатую часть *A* вынуть изъ части *B* и затѣмъ снова вдвинуть ее между зубьевъ части *B*, перемѣстивъ на одинъ зубъ вправо, то получится безукоризненный прямоугольникъ.



Фиг. 6.

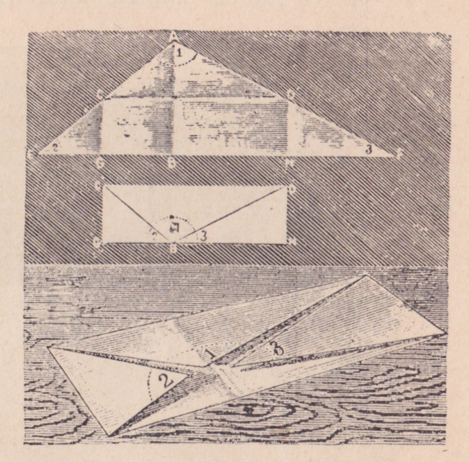
Задача 7-я.

Оригинальное доказательство.

Всякій, проходившій геометрію, знаетъ, что **сумма угловъ треугольника равна двумъ прямымъ угламъ.**

Но мало кому извѣстно, что эта основная теорема, на которой зиждется все стройное Евклидово зданіе, можетъ быть «доказана» съ помощью простого лоскутка бумаги.

Мы ставимъ слово «доказана» въ кавычкахъ, потому что, собственно говоря, это не доказательство въ строгомъ смыслѣ слова, а скорѣе лишь наглядная демонстрація. Но все же этотъ остроумный пріемъ, придуманный Томомъ Титомъ, очень любопытенъ и поучителенъ.



Фиг. 7.

Вырѣзаютъ изъ бумаги любой формы треугольникъ и перегибаютъ его сначала по линіи *AB* (фиг. 7). Затѣмъ, снова разогнувъ бумагу, перегибаютъ треугольникъ по линіи *CD* такъ, чтобы вершина *A* попала въ точку *B*. Перегнувъ затѣмъ треугольникъ по линіямъ *DH* и *CG* и получивъ прямоугольникъ *CGHD*, мы наглядно убѣждаемся, что всѣ три угла треугольника (1, 2, 3) составляютъ въ суммѣ два прямыхъ.

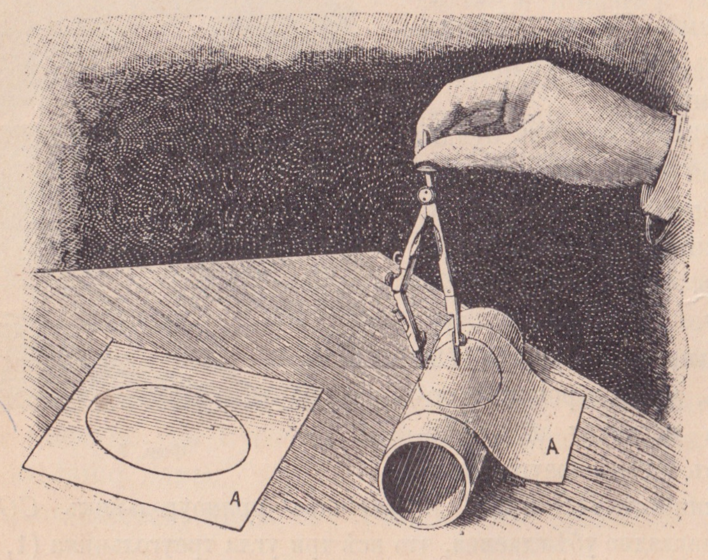
Необычайная наглядность и простота этого пріема позволяетъ познакомить даже дѣтей, не изучающихъ геометріи, съ одной изъ ея важнѣйшихъ теоремъ. Для знающихъ же геометрію онъ представляетъ интересную задачу—объяснить, почему такое сгибаніе бумажнаго треугольника всегда даетъ желаемый результатъ. Объяснить это не трудно, и мы не хотѣли бы лишить читателя удовольствія самому подыскать геометрическое основаніе этого своеобразнаго доказательства.

Задача 8-я.

Вычерчиваніе циркулемъ овальныхъ линій.

Рѣшеніе.

Для вычерчиванія по плоскости замкнутыхъ овальныхъ кривыхъ, извѣстныхъ подъ именемъ эллипсисовъ (или эллисовъ) существуетъ спеціальный приборъ, такъ называемый **эллипсографъ.** Но можно получать овалы правильной формы и безъ этого сложнаго и дорогого прибора—просто помощью циркуля, если только прибѣгнутъ къ небольшому ухищренію, о которомъ даетъ понятіе настоящій рисунокъ (фиг. 8).



Фиг. 8.

Оберните цилиндръ бумажкой и начертите циркулемъ замкнутую кривую на этой цилиндрической поверхности. Развернувъ затѣмъ бумажку, вы убѣдитесь, что начертили не кругъ, а овалъ, тѣмъ болѣе вытянутый, чѣмъ меньше радіусъ цилиндра по сравненію съ раствореніемъ циркуля.

Такимъ практическимъ способомъ вычерчиванья оваловъ часто пользуются въ различныхъ мастерскихъ, хотя среди чертежниковъ и рисовальщиковъ онъ сравнительно мало извѣстенъ.

Слѣдуетъ, однако, имѣть въ виду, что получаемый такимъ пріемомъ овалъ не есть, вообще говоря, эллипсъ въ собственномъ смыслѣ этого слова, какъ бы велико ни казалось сходство. Получаемый овалъ есть кривая пересѣченія шара и цилиндра, т. е., говоря математически,—**кривая 4-го порядка**.

Не трудно убѣдиться также въ томъ, что вычертить сплошной овалъ указаннымъ нами путемъ возможно только въ томъ случаѣ, если радіусъ взятаго нами цилиндра больше половины раствореніе циркуля.

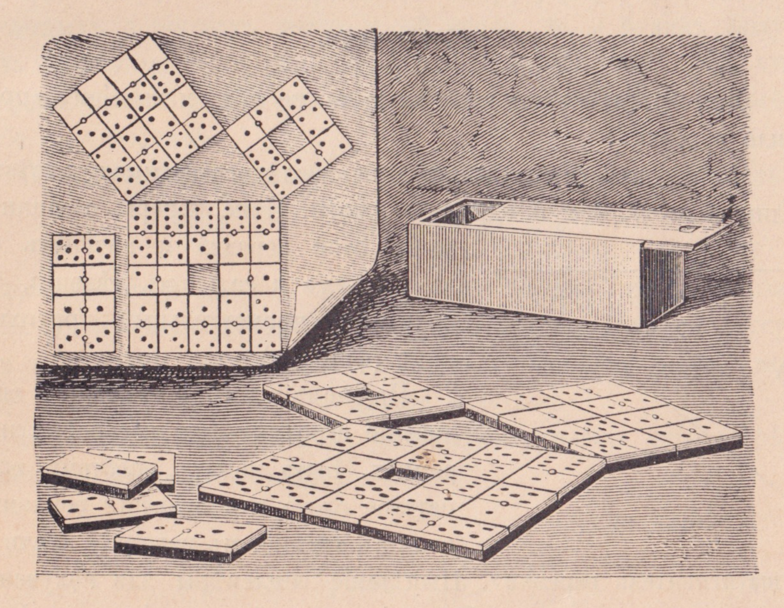
Задача 9-я.

Теорема Пиѳагора.

Посредствомъ плитокъ домино доказать Пиѳагорову теорему[1]).

Рѣшеніе.

Сложите плитки домино такъ, какъ показано на нашемъ рисункѣ (фиг. 9). Вы убѣдитесь, что квадратъ, построенный на гипотенузѣ, состоитъ изъ 25-ти мелкихъ квадратовъ, а ква-



Фиг. 9.

[1]) Т. е. что площадь квадрата, построеннаго на гипотенузѣ прямоугольнаго треугольника, равна суммѣ площадей квадратовъ, построенныхъ на его катетахъ.

драты, построенные на катетахъ,—соотвѣтственно изъ 9 и 16-ти такихъ же мелкихъ квадратовъ. А такъ какъ $25 = 9 + 16$, то теорема «доказана» (прямоугольность треугольника повѣряется прямымъ угломъ какой-нибудь костяшки или группы ихъ).

Само собою разумѣется, что это не доказательство, а лишь наглядная иллюстрація, да и то пригодная лишь для тѣхъ случаевъ, когда всѣ три стороны прямоугольнаго треугольника выражаются цѣлыми числами. Въ данномъ случаѣ для сторонъ треугольника имѣемъ числа 3, 4 и 5. Такихъ чиселъ, впрочемъ, есть сколько угодно, какъ читатель можетъ убѣдиться изъ поясненій въ слѣдующей задачѣ.

Задача 10-я.

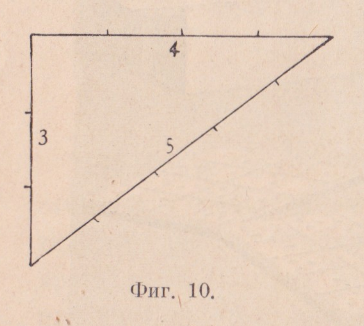
Египетская задача.

Съ помощью веревки въ 12 единицъ длины построить прямоугольный треугольникъ.

Рѣшеніе.

Задача эта извѣстна издревле также подъ названіемъ «правила веревки».

На веревкѣ отмѣривались три послѣдовательныхъ отрѣзка длиною въ 3, 4 и 5 единицъ длины. Если, теперь, соединить концы этой веревки и натянуть ее на третьемъ и седьмомъ дѣленіи, то получится прямоугольный треугольникъ (фиг. 10).



Фиг. 10.

Пріемомъ этимъ пользовались еще древніе египтяне при постройкѣ пирамидъ. Быть можетъ, поэтому египетское слово для названія землемѣровъ въ дословномъ переводѣ значитъ «вытягиватель веревки». Нынѣшніе землемѣры для полученія прямого угла также прибѣгаютъ къ подобному пріему, отмѣчая на своихъ землемѣрныхъ цѣпяхъ такую комбинацію изъ трехъ

цѣлыхъ чиселъ, которая выражала бы длины сторонъ прямоугольнаго треугольника съ соизмѣримыми сторонами.

Числа эти должны удовлетворять условію Пиѳагоровой теоремы, т. е. сумма квадратовъ двухъ изъ нихъ должна быть равна квадрату третьяго числа. Взятыя выше цѣлыя числа, 3, 4, 5, удовлетворяютъ этому условію: $3^2 + 4^2 = 5^2$. Но легко видѣть, что подобныхъ чиселъ можно найти, сколько угодно.

Всѣ эти такъ называемыя **Пиѳагоровы числа** заключаются въ тождественномъ равенствѣ, которое каждый легко можетъ провѣрить:

$$\left(\frac{a^2 + b^2}{2}\right)^2 = a^2b^2 + \left(\frac{a^2 - b^2}{2}\right)^2.$$

Здѣсь, значитъ, ab и $\frac{a^2 - b^2}{2}$ даютъ катеты, а $\frac{a^2 + b^2}{2}$ соотвѣтствующую имъ гипотенузу.

Если вмѣсто a и b подставлять въ эту формулу два любыхъ нечетныхъ и первыхъ между собой числа, то и будемъ получать различные требуемые треугольники и при томъ такіе, что стороны одного не будутъ кратными сторонами другого какого-либо треугольника.

Пиѳагоровы числа получаются также на основаніи тождества

$$(m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2 = (m^2 + n^2)^2,$$

подставляя сюда вмѣсто m и n какія угодно цѣлыя числа. Если же мы желаемъ избѣжать группъ кратныхъ другъ другу, или подобныхъ, треугольниковъ, то числа надо брать первыя между собой и одно четное, а другое нечетное.

Вотъ небольшая табличка части Пиѳагоровыхъ чиселъ, рѣшающихъ египетскую задачу:

3,	4,	5
5,	12,	13
7,	24,	25
9,	40,	41

11,	60,	61
13,	84,	85
15,	8,	17
15,	112,	113
17,	144,	145
19,	180,	181
21,	20,	29
27,	36,	45
33,	56,	65
35,	12,	37
39,	80,	89
45,	28,	53
45,	108,	117
51,	140,	149
55,	48,	73
57,	176,	185
63,	16,	65
65,	72,	97
75,	100,	125
77,	36,	85
85,	132,	157
91,	60,	109
95,	168,	193
99,	20,	101

и т. д.

Начатки математики на Нилѣ.

Упоминаніе о египетскомъ треугольникѣ, сдѣланное въ предыдущей задачѣ, невольно обращаетъ мысль въ глубь исторіи развитія человѣческихъ знаній. Можно считать несомнѣнно установленнымъ, что древніе египтяне обладали знаніемъ многихъ математическихъ фактовъ и умѣньемъ производить нѣкоторыя математическія дѣйствія настолько давно, насколько только можно проникнуть въ глубину вѣковъ этой древнѣйшей цивилизаціи на Землѣ. Пиѳагорова теорема въ приложеніи къ равнобедреннымъ прямоугольнымъ треугольникамъ (оба катета равны)

была извѣстна имъ съ незапамятныхъ временъ. Треугольникомъ со сторонами 3, 4 и 5 пользовались строители древнѣйшихъ пирамидъ и храмовъ для полученія прямого угла. Одинъ изъ дошедшихъ до насъ египетскихъ папирусовъ писанъ за 1700 лѣтъ до Р. X. на основаніи египетскихъ же писаній за 3000 лѣтъ и болѣе до Р. X. Въ немъ уже содержатся нѣкоторыя ариѳметическія задачи, таблица дробей и рѣшеніе простѣйшихъ уравненій, гдѣ неизвѣстное обозначается знакомъ **хау** (хипъ). Существуетъ мнѣніе, будто ариѳметика (осбенно—начатки ея) есть самый старѣйшій изъ членовъ великой семьи математическихъ наукъ. Но трудно какъ-либо убѣдительно доказать эту мысль. Начало алгебры и геометріи также скрываются въ таинственномъ мракѣ доисторическихъ судебъ человѣчества.

Всюду, гдѣ только мы въ состояніи приподнять завѣсу надъ драмой человѣческой исторіи отдаленнѣйшихъ вѣковъ, мы видимъ, что люди уже считаютъ, рѣшаютъ уравненія 1-ой степени и прилагаютъ простѣйшіе случаи Пиѳагоровой теоремы.

Задача 11-я.

Численный кругъ пиѳагорейцевъ.

Этотъ «Circulus Pythagoricus» находится въ сочиненіи одного изъ учениковъ Пиѳагоровой школы Ямвлика, жившаго въ IV-мъ вѣкѣ послѣ Р. X. [1]). Вотъ въ чемъ состоитъ этотъ кругъ.

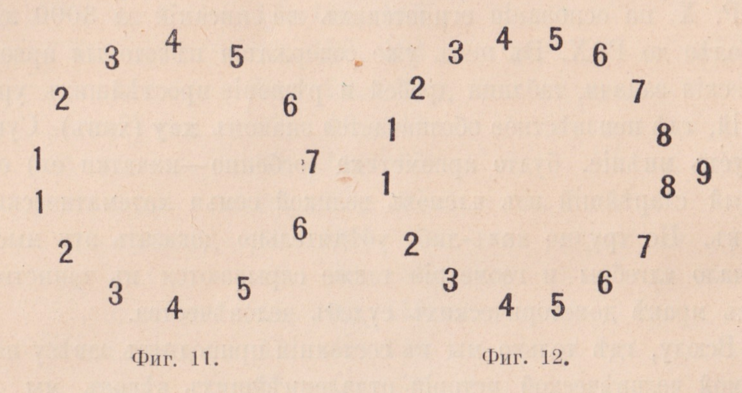
Будемъ писать по кругу рядъ послѣдовательныхъ чиселъ отъ 1 до какого-либо числа, т. е. рядъ чиселъ 1, 2, 3, 4,... n. Дойдя до этого напередъ заданнаго себѣ числа n, продолжаемъ писать по кругу тѣ же числа, но въ обратномъ уменьшающемся порядкѣ, пока не напишемъ опять единицу,—т. е. пишемъ: $n - 1$,

---

[1]) Jamblicus Chalcidensis ex Coele-Syria in Nicomachi Gerasini Arithmeticam introductionem et de Fato. Nunc primum editus, in latinum sermonem conversus, notis perpetuis illustratus a Samuele Tennulio. Accedit Joachimi Camerarii. Explicatio in duos libros Nicomachi, cum indice rerum et verborum locupletissimo, Arnhemiae. Postant apud Jah. Frideriam Hagium. Deventrae typis discripsit Wilhelmus Wier MDCLXVIII (1668).

$n-2, \ldots 2, 1$. Тогда сумма всѣхъ чиселъ, написанныхъ въ кругѣ, даетъ квадратъ числа n (т. е. число n умноженное само на себя).

Такъ, напр., если желаемъ найти квадратъ 7, пишемъ (фиг. 11):



Фиг. 11. Фиг. 12.

Сложивъ всѣ числа этого круга, дѣйствительно, получимъ: $49 = 7^2$.

Для числа, напр., 9 будемъ имѣть кругъ (фиг. 12), сумма чиселъ котораго равна $9^2 = 81$ и т. д.

Доказательство.

Для какого бы то ни было числа n этотъ пиѳагорейскій кругъ можно представить такъ

$$\begin{matrix} 1\ 2\ 3\ 4\ 5 \ldots\ldots n-1 \\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5 \ldots\ldots n-1 \end{matrix} \quad n.$$

Т. е. получается два одинаковыхъ ряда послѣдовательныхъ чиселъ отъ 1 до $n-1$, и къ суммѣ обоихъ этихъ рядовъ надо прибавить еще число n.

Но сумма $n-1$ послѣдовательныхъ чиселъ, начиная съ единицы, какъ знаемъ, равна $\frac{n(n-1)}{2}$. Слѣдовательно, для суммы двухъ такихъ рядовъ да еще числа n имѣемъ

$$n(n-1) + n = n^2,$$

что и доказываетъ задачу о пиѳагорейскомъ кругѣ.

Обобщеніе задачи.

Для желающихъ нѣсколько болѣе углубиться въ сущность пиѳагорейскаго круга сдѣлаемъ еще нѣсколько дополненій. Обозначимъ черезъ S_n сумму послѣдовательныхъ чиселъ отъ 1 до n. Тогда доказанное выше предложеніе Ямблика выразится формулой

$$2S_{n-1}+n=n^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Разсматривая рядъ цѣлыхъ чиселъ, мы находимъ, что для числа 2, $S_{n-1}<n$; для числа 3, $S_{n-1}=n$, а для всѣхъ остальныхъ чиселъ $S_{n-1}>n$. Итакъ, можно высказать такое предложеніе:

Если квадратъ цѣлаго числа (кромѣ 2 и 3) раздѣлимъ на сумму всѣхъ послѣдовательныхъ чиселъ до этого числа, то въ частномъ будетъ 2, а въ остаткѣ само число.

Подобно формулѣ (1) можно написать еще рядъ равенствъ:

$$2S_{n-2}+n-1=(n-1)^2$$
$$2S_{n-3}+n-2=(n-2)^2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$2S_2+3=3^2$$
$$2S_1+2=2^2$$
$$1=1^2$$

Складывая всѣ эти равенства съ (1) и означая для краткости

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2+n^2=S_n^{(2)},$$

получаемъ:

$$2(S_1+S_2+S_3+\ldots+S_{n-1})+S_n=S_n^{(2)}.$$

Это тоже можно написать въ видѣ пиѳагорейскаго круга:

$$\begin{matrix} S_1 & S_2 & S_3 & \ldots\ldots & S_{n-1} & \\ & & & & & S_n, \\ S_1 & S_2 & S_3 & \ldots\ldots & S_{n-1} & \end{matrix}$$

гдѣ сумма всѣхъ членовъ даетъ $S_n^{(2)}$.

Задача 12-я.

Земля и апельсинъ.

Въ предлагаемой ниже интересной задачѣ мы впервые встрѣчаемся съ числомъ, выражающимъ отношеніе длины окружности къ діаметру. Это знаменитое число принадлежитъ къ классу такъ называемыхъ «ирраціональныхъ» чиселъ. Обыкновенно оно изображается греческой буквой π (пи). Приблизительно

$$\pi = 3{,}141\,5926...$$

Въ настоящей книгѣ намъ не разъ еще придется говорить объ этомъ числѣ.

Вообразимъ, что земной шаръ обтянутъ по экватору обручемъ и что подобнымъ же образомъ обтянутъ и апельсинъ по его большому кругу. Далѣе вообразимъ, что окружность каждаго обруча удлинилась на 1 сажень. Тогда, разумѣется, обручи отстанутъ отъ поверхности тѣлъ, которыя они раньше стягивали, и останется нѣкоторый прозоръ (промежутокъ). Спрашивается, въ какомъ случаѣ этотъ прозоръ будетъ больше,—у земного шара или у апельсина?

Рѣшеніе.

Обыкновенно на этотъ вопросъ отвѣчаютъ такъ: «Конечно, у апельсина останется большій прозоръ, нежели у Земли! Вѣдь по сравненію съ окружностью земного шара—38.000 верстъ—какая-нибудь одна сажень есть столь ничтожная величина, что прибавка ея останется совершенно незамѣтной. Другое дѣло апельсинъ: по сравненію съ его окружностью сажень—большая величина, и прибавка ея къ длинѣ окружности должна быть весьма ощутительна».

Такой отвѣтъ естественно навязывается уму всякаго—и математика и не-математика. Математикъ еще подкрѣпитъ его геометрическими соображеніями, въ родѣ слѣдующаго: «Такъ

какъ отношеніе длины окружности къ діаметру (число π) есть величина постоянная, то приращеніе радіуса Земли (т. е. прозоръ) долженъ быть во столько разъ меньше приращенія радіуса апельсина, во сколько разъ радіусъ земного шара больше радіуса апельсина» и т. д.

Но всѣ эти разсужденія—одно только лукавое мудрствованіе. Простымъ вычисленіемъ легко доказать, что—именно въ виду постоянства отношенія окружности къ діаметру—прозоръ совершенно не зависитъ отъ радіуса окружности и долженъ быть **одинаковъ у Земли и у апельсина.**

Въ самомъ дѣлѣ, пусть окружность экватора равна C саженямъ, а окружность апельсина c. Тогда радіусъ Земли $R=\frac{C}{2\pi}$, а радіусъ апельсина $r=\frac{c}{2\pi}$. Послѣ прибавки къ обручамъ одной сажени, окружности ихъ будутъ равны: Земли $C+1$, апельсина $c+1$; радіусы же ихъ будутъ: Земли $\frac{C+1}{2\pi}$, апельсина $\frac{c+1}{2\pi}$. Если изъ новыхъ радіусовъ вычтемъ прежніе, то получимъ въ обоихъ случаяхъ одно и то же приращеніе:

$$\frac{C+1}{2\pi}-\frac{C}{2\pi}=\frac{1}{2\pi} \text{ для земли,}$$

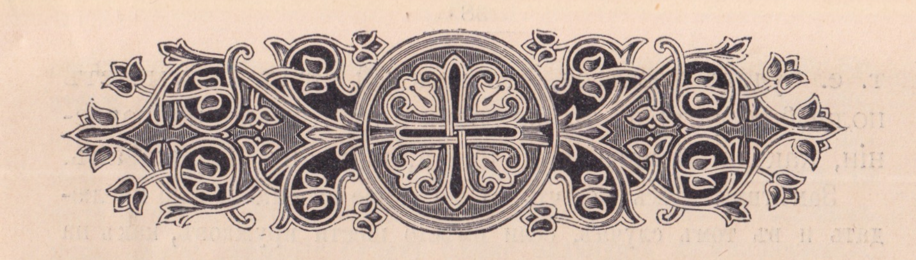
$$\frac{c+1}{2\pi}-\frac{c}{2\pi}=\frac{1}{2\pi} \text{ для апельсина.}$$

Итакъ, у Земли и у апельсина получится одинъ и тотъ же прозоръ въ $\frac{1}{2\pi}$ саж., т. е. примѣрно въ полъ-аршина.

Этотъ результатъ кажется до такой степени неожиданнымъ и неправдоподобнымъ, что намъ случалось видѣть людей, которые, сами получивъ его, все же въ него не вѣрили: они продѣлывали съ помощью бечевки рядъ обмѣровъ и опытовъ съ монетами, тарелками и др. круглыми предметами,—и лишь тогда успокаивались, когда воочію убѣждались, что опытъ подтверждаетъ ихъ вычисленіе. А одинъ математикъ такъ даже

формулировалъ свой отвѣтъ на изложенную задачу буквально въ слѣдующихъ выраженіяхъ:

«Прозоръ для Земли долженъ, конечно, быть меньше, чѣмъ для апельсина, хотя геометрически, казалось бы (!), они должны быть одинаковы». Чудакъ больше вѣрилъ «здравому смыслу», чѣмъ математическимъ выкладкамъ,—которыя, къ слову сказать, онъ продѣлалъ безукоризненно. Оно, пожалуй, и понятно: трудно найти болѣе разительный примѣръ геометрическаго **парадокса** (не софизма, а именно парадокса, т. е. неправдоподобной съ виду истины), чѣмъ эта задача о Землѣ и апельсинѣ.



Обманы зрѣнія.

Кажущееся вращеніе.

Явленіе, о которомъ мы сейчасъ будемъ говорить, было впервые подмѣчено Сильванусомъ Томпсономъ, профессоромъ университетской коллегіи въ Бристолѣ. Почтенный ученый полагалъ, что это явленіе не можетъ быть объяснено способностью человѣческаго глаза сохранять воспринятыя зрительныя впечатлѣнія. Онъ думалъ, что изученіе подобныхъ явленій можетъ повести къ открытію новыхъ свойствъ глаза. Между тѣмъ въ «Журналѣ Элементарной Математики» за 1885 г. есть весьма удачное объясненіе этого явленія С. Шостака, въ основѣ котораго лежитъ именно способность глаза сохранять зрительныя впечатлѣнія.

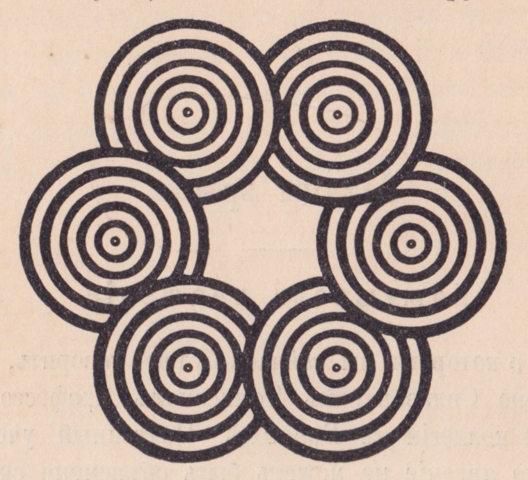
Приводимъ описаніе явленія и его объясненія г. Шостакомъ для примѣра, какъ можно (и даже по возможности всегда **нужно**) пользоваться математическимъ анализомъ при разсмотрѣніи различныхъ встрѣчающихся намъ явленій.

Возьмемъ прилагаемую здѣсь фигуру 13-ю, которую каждый желающій можетъ нарисовать и самъ, для удобства наблюденій, на отдѣльномъ листкѣ.

Если листку бумаги (или книгѣ) съ предложенной фигурой сообщить незначительное круговое движеніе въ плоскости фигуры, то каждый изъ шести кружковъ будетъ казаться вращающимся около своего центра въ сторону движенія фигуры и съ такою же скоростью,

т. е. будетъ казаться, что каждый кругъ описываетъ полный оборотъ въ то же время и въ томъ же направленіи, какъ и бумага или книга, гдѣ онъ нарисованъ.

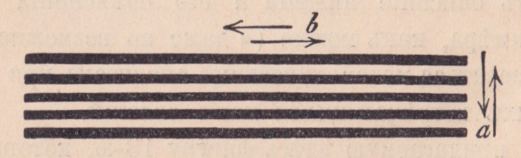
Замѣтимъ здѣсь же, что то же самое явленіе можно наблюдать и въ томъ случаѣ, если вмѣсто шести кружковъ, какъ на



Фиг. 13.

фиг. 13, возьмемъ только одинъ, составленный изъ концентрическихъ окружностей.

Объясненіе явленія. Если взять чертежъ, данный на слѣдующей фиг. 14-й, и сообщить ему быстрое движеніе взадъ и впередъ, какъ показываетъ стрѣлки *a*, читатель замѣтитъ, что

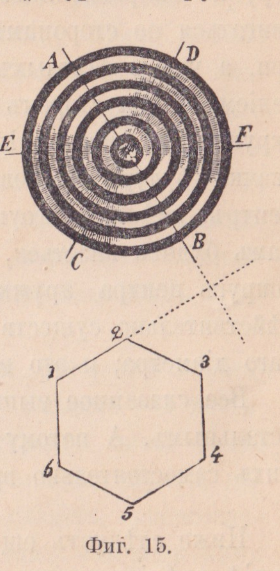


Фиг. 14.

рисунокъ потеряетъ свою отчетливость и сдѣлается какъ бы туманнымъ. Это зависитъ оттого, что черныя полосы занимаютъ мѣсто бѣлыхъ и бѣлыя—черныхъ, такъ что получается какъ бы смѣшеніе чернаго цвѣта съ бѣлымъ, вслѣдствіе чего является сѣрый тонъ. Если тому же рисунку сообщить движеніе взадъ и впередъ по направленію стрѣлокъ *b*, то черный

цвѣтъ не будетъ занимать мѣста бѣлаго и бѣлый—чернаго, поэтому рисунокъ не долженъ будетъ терять свою отчетливость, что и подтверждается опытомъ. Если мы дадимъ рисунку движенiе по направленiю среднему между двумя названными, то фигура также потеряетъ свою отчетливость, и тѣмъ болѣе, чѣмъ направленiе движенiя будетъ ближе подходить къ направленiю, указанному стрѣлками *a*. Изъ этого заключаемъ, что **бѣлый цвѣтъ остается чисто бѣлымъ только въ томъ случаѣ, когда движенiе происходитъ параллельно направленiю полосокъ.**

Вообразимъ теперь, что мы сообщаемъ фигурѣ не круговое движенiе, а по направленiю сторонъ шестиугольника 123456 (фиг. 15), такъ что каждый кружокъ движется сначала по направленiю отъ 1 къ 2, потомъ отъ 2 къ 3, отъ 3 къ 4 и т. д. Разсмотримъ тотъ перiодъ, когда движенiе происходитъ параллельно линiи 1—2, и проведемъ дiаметръ *AB*, перпендикулярный къ 1—2. Части концентрическихъ круговъ, заключающiяся въ узкой полоскѣ вдоль *AB*, можно считать перпендикулярными къ *AB* и, слѣдовательно, параллельными къ 1—2, т. е. **параллельными къ линiи движенiя,** а вслѣдствiе этого, на основанiи сказаннаго выше, бѣлыя части этой полоски останутся бѣлыми, а на кружкѣ обозначится, поэтому, свѣтлый дiаметръ по направленiю *AB* (дiаметръ будетъ казаться узкимъ по серединѣ и широкимъ по концамъ). Остальная часть кружка будетъ болѣе или менѣе туманною, такъ какъ другiя части концентрическихъ круговъ будутъ двигаться по направленiю не параллельному линiи движенiя 1—2, а подъ угломъ къ ней. Обратимся теперь ко второму перiоду, т. е. къ тому времени, когда движенiе происходитъ параллельно линiи 2—3. Проведемъ дiаметръ *CD* перпендикулярно къ направленiю линiи движенiя, т. е. перпендикулярно къ линiи 2—3. Мы доказали, что въ первый перiодъ движенiя на кружкѣ долженъ обозначиться



Фиг. 15.

свѣтлый діаметръ по направленію AB. Подобно же можно доказать, что во второй періодъ движенія этимъ свѣтлымъ діаметромъ будетъ уже не AB, а CD. Въ третій періодъ свѣтлый діаметръ будетъ направленъ по EF (предполагая, что EF перпендикулярна къ линіи 3—4). Въ четвертый періодъ опять по AB (такъ какъ 4—5 параллельна 1—2) и т. д., т. е. свѣтлый діаметръ, по мѣрѣ измѣненія направленія движенія, будетъ, такъ сказать, перескакивать изъ AB въ CD, изъ CD въ EF и т. д. Если мы вмѣсто того, чтобы заставлять двигаться фигуру по направленіямъ сторонъ шестиугольника, заставимъ ее двигаться по сторонамъ двѣнадцатиугольника, то получимъ не три, а шесть свѣтлыхъ діаметровъ и т. д.; словомъ съ увеличеніемъ числа сторонъ и, слѣдовательно, съ приближеніемъ къ окружности, число свѣтлыхъ діаметровъ будетъ увеличиваться, скачки будутъ становиться все меньше и меньше, и когда центръ, вмѣсто многоугольника, станетъ описывать окружность, намъ будетъ казаться, что свѣтлый діаметръ плавно вращается вокругъ центра кружка. Слѣдовательно, при нашемъ опытѣ дѣйствительно существуетъ вращеніе, но **не кружка**, а свѣтлаго діаметра; и это вращеніе глазомъ приписывается кружку.

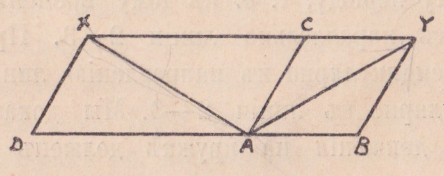
Все сказанное выше объ одномъ кружкѣ относится и къ остальнымъ. А потому намъ будетъ казаться, что каждый изъ нихъ самостоятельно вращается около своего центра.

Ниже слѣдуетъ еще нѣсколько интересныхъ примѣровъ иллюзій зрѣнія, толкованіемъ которыхъ мы предлагали бы читателю заняться самому.

Задача 13-я.

Какая линія длинѣе?

Взглянувъ на прилагаемый здѣсь чертежъ (фиг. 16), скажите, какая линія длиннѣе: AX или AY?



Фиг. 16.

Разъясненіе.

Можно утверждать навѣрняка, что каждый, взглянувъ на чертежъ, скажетъ, что діагональ AX несомнѣнно, молъ, длиннѣе AY. Но стоитъ вамъ смѣрить ихъ хотя бумажкой,—и вы, къ изумленію, убѣдитесь, что онѣ равны! Сообразивъ, можно это сказать и безъ примѣрки: если изъ точки A провести перпендикулярную линію къ XY, то станетъ ясно, что перпендикуляръ раздѣлитъ ее пополамъ, а вслѣдствіе равенства проэкцій, наклонныя AX и AY должны быть между собою равны.

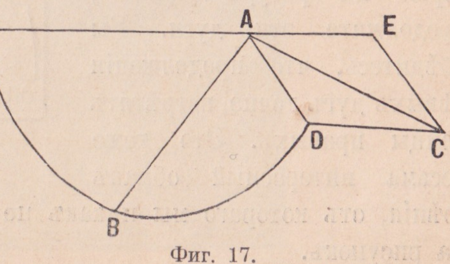
Чѣмъ же объяснить такой странный обманъ зрѣнія? Возможно разсуждать такъ: если бы наше сознаніе воспринимало вещи такими, каковы онѣ на самомъ дѣлѣ, ничего къ нимъ не присочиняя,—то подобныхъ иллюзій не могло бы быть. Но въ томъ-то и дѣло, что мы незамѣтно для самихъ себя разсуждаемъ, воспринимая впечатлѣнія внѣшняго міра. Эти-то «подсознательныя» разсужденія и являются причиной подобныхъ оптическихъ обмановъ.

Такъ какъ этотъ процессъ разсужденія совершается безсознательно для насъ, то довольно трудно бываетъ съ достовѣрностью его возстановить: приходится строить лишь болѣе или менѣе правдоподобныя догадки. Въ данномъ случаѣ, напримѣръ, мы безсознательно, или, лучше сказать, «подсознательно», разсуждаемъ, по всей вѣроятности, такъ: «Передъ нами два параллелограмма—длинный и короткій. Ясное дѣло, что у длиннаго параллелограмма діаганали должны быть длиннѣе, чѣмъ у короткаго».

Впрочемъ, предлагаемъ желающему дать болѣе удачное объясненіе.

Вотъ еще подобный же примѣръ.

Не правда ли, что на фигурѣ 17-й линія AB кажется намъ длиннѣе линіи AC?

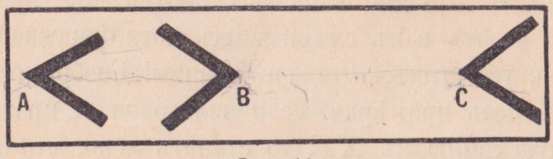


Фиг. 17.

Въ дѣйствительности же онѣ строго равны между собой.

Точно также:

Кажется совершенно невѣроятнымъ, чтобы точки *A* и *C* (фиг. 18-й) одинаково отстояли отъ точки *B*.



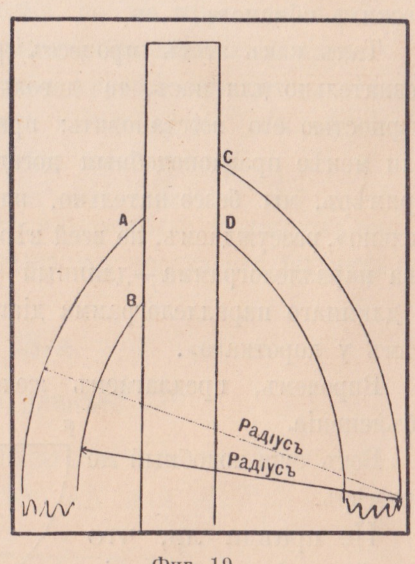
Фиг. 18.

А между тѣмъ это такъ! Разстояніе скрадывается здѣсь наклономъ линій и ихъ толщиной.

Задача 14-я.

Двѣ пары дугъ.

На фиг. 19 изображены двѣ пары круговыхъ дугъ. Если продолжить лѣвыя дуги, то встрѣтятъ ли онѣ оконечности правыхъ?



Фиг. 19.

На взглядъ это кажется невозможнымъ; а между тѣмъ возьмите въ руки циркуль и радіусами окружностей, которые на фигурѣ указаны, продолжите эти дуги. Вы убѣдитесь, что продолженія лѣвыхъ дугъ точно встрѣтятъ концы правыхъ. Это тоже весьма интересный обманъ зрѣнія, отъ котораго мы никакъ не можемъ отдѣлаться, смотря на рисунокъ.

Задача 15-я.

Какъ написано слово?

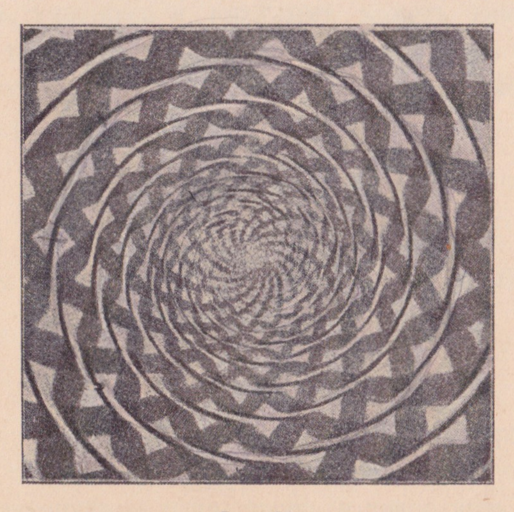
Прилагаемая и слѣдующая фигуры (фиг. 20 и 21) даютъ едва ли не самые интересные образчики зрительныхъ иллюзій. На фиг. 20-й вы видите написанное англійское слово **LIFE** (жизнь), при чемъ вамъ до очевидности ясно, что буквы рѣзко наклонены въ разныя стороны. Но, приложивъ линейку, вы можете убѣдиться, что **эти буквы поставлены совершенно прямо** и только начерчены мелкими наклонными штрихами.

Фиг. 20.

Задача 16-я.

Какая кривая?

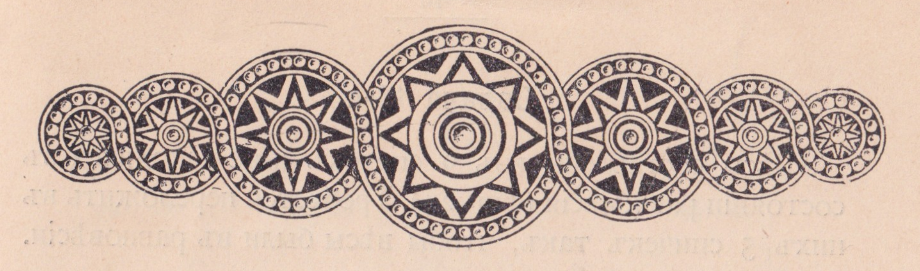
На фигурѣ 21-й изображены концентрическія окружности, а вовсе не спираль, или рядъ спиралей, какъ кажется на взглядъ.



Фиг. 21.

Въ этомъ легко убѣдиться. Поставьте карандашъ на одну изъ дугъ и ведите его по ней. Противъ ожиданія, вы будете кружиться въ замкнутомъ кругѣ, а вовсе не приближаться къ центру или удаляться къ краю, какъ должно быть, если бы на чертежѣ была изображена спираль. Сѣтчатый фонъ, на которомъ начерчены обѣ послѣднія фигуры, много способствуетъ усиленію этихъ эффектныхъ иллюзій.

Еще нѣкоторые рисунки и подробности по предмету, разсматриваемому въ этой главѣ, читатель найдетъ въ 3-й книгѣ «Въ Царствѣ Смекалки».

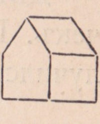


Задачи и развлеченія со спичками.

Въ первой книгѣ настоящаго опыта математической хрестоматіи мы уже указали на нѣкоторыя простѣйшія математическія задачи и игры со спичками. Приводимъ здѣсь еще нѣсколько простыхъ и интересныхъ задачъ и развлеченій этого рода, при чемъ считаемъ нужнымъ обратить вниманіе читателя на небольшую книжечку Софуса Тромгольда «Игры со спичками», довольно полно и всесторонне исчерпывающую предметъ Книжечка эта имѣется въ русскомъ переводѣ, въ прекрасномъ изданіи одесскаго книгоиздательства «Mathesis», и стоитъ всего полтинникъ. Обыкновенная коробка шведскихъ спичекъ есть незамѣнимое по своей доступности и дешевизнѣ пособіе, которое дѣтямъ, учащимся и взрослымъ можетъ помочь провести досуги не только весело, но и съ пользой. Объ этомъ слѣдовало бы постоянно помнить. Начнемъ съ незамысловатыхъ задачъ на переложеніе спичекъ.

Задача 17-я.

Этотъ домъ составленъ изъ 10 спичекъ. Требуется повернуть его къ намъ другой стороной, передвинувъ только 2 спички.



Фиг. 22.

Рѣшеніе.

Фиг. 23.

Отвѣтъ ясенъ изъ фиг. 23-й, которая получается изъ предыдущей, если въ «крышѣ» дома (фиг. 22) пріопустить одну спичку и приподнять другую.

Задача 18-я.

Вѣсы составлены изъ 9 спичекъ и не находятся въ состояніи равновѣсія (фиг. 24). Требуется переложить въ нихъ 5 спичекъ такъ, чтобы вѣсы были въ равновѣсіи.

Рѣшеніе.

Дается фиг. 25-ой.

Задача 19-я.

Этотъ греческій храмъ (фиг. 26) построенъ изъ 11 спичекъ. Требуется переложить 4 спички такъ, чтобы получилось 11 квадратовъ.

Рѣшеніе.

См. фиг. 27-ю.

Задача 20-я.

Въ памятникѣ, составленномъ изъ 12-ти спичекъ (фиг. 28) требуется переложить 5 спичекъ такъ, чтобы получилось 3 квадрата.

Рѣшеніе

ясно изъ фиг. 29.

Задача 21-я.

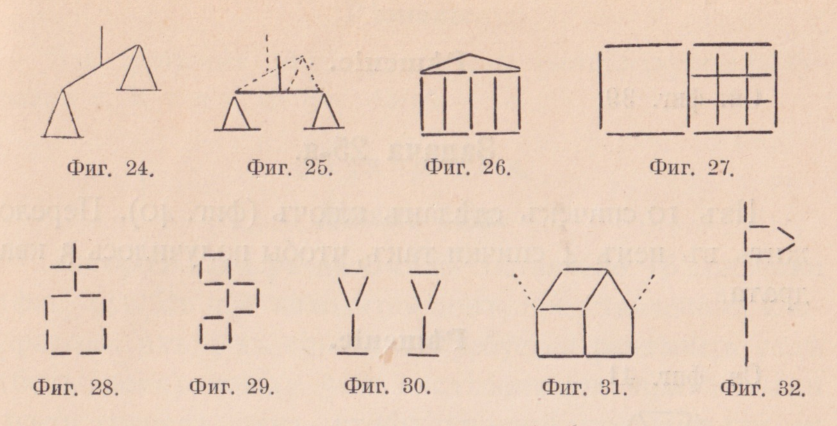
Двѣ рюмки (фиг. 30) составлены изъ десяти спичекъ. Переложить въ нихъ 6 спичекъ такъ, чтобы получился домъ.

Рѣшеніе.

См. фиг. 31.

Задача 22-я.

Флюгеръ (фиг. 32) составленъ изъ 10 спичекъ. Переложить 4 спички такъ, чтобы получился домъ.


Фиг. 24. Фиг. 25. Фиг. 26. Фиг. 27.

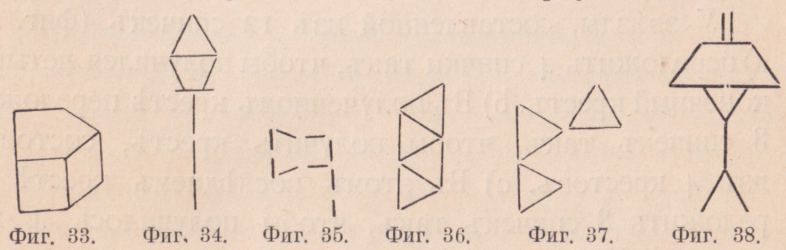
Фиг. 28. Фиг. 29. Фиг. 30. Фиг. 31. Фиг. 32.

Рѣшеніе.

См. фиг. 33.

Задача 23-я.

Вотъ фонарь (фиг. 34) и вотъ топоръ (фиг. 35). Каждый изъ нихъ составленъ изъ 9 спичекъ. Переложить въ фонарѣ 6 спичекъ и получить четыре равныхъ треугольника, составляющихъ въ свою очередь четыреугольникъ. Переложить въ топорѣ 4 спички такъ, чтобы получилось 3 равныхъ треугольника.


Фиг. 33. Фиг. 34. Фиг. 35. Фиг. 36. Фиг. 37. Фиг. 38.

Рѣшеніе.

Изъ фонаря получается фиг. 36-я.
Изъ топора получается фиг. 37-я.

Задача 24-я.

Въ этой лампѣ, составленной изъ 12 спичекъ (фиг. 38), переложить 3 спички такъ, чтобы получить 5 равныхъ треугольниковъ.

Рѣшеніе.

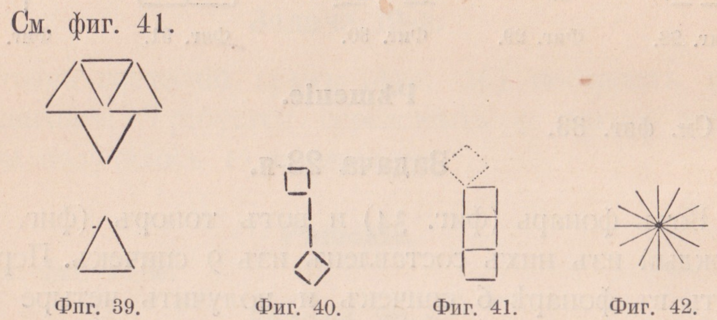
См. фиг. 39.

Задача 25-я.

Изъ 10 спичекъ сдѣланъ ключъ (фиг. 40). Переложить въ немъ 4 спички такъ, чтобы получилось 3 квадрата.

Рѣшеніе.

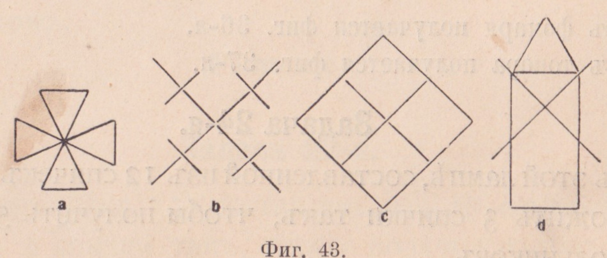
См. фиг. 41.



Фпг. 39. Фиг. 40. Фиг. 41. Фиг. 42.

Задача 26-я.

У звѣзды, составленной изъ 12 спичекъ (фиг. 42): a) переложить 4 спички такъ, чтобы получился четырехконечный крестъ. b) Въ полученномъ крестѣ переложить 8 спичекъ такъ, чтобы получить крестъ, состоящій изъ 4 крестовъ. c) Въ этомъ послѣднемъ крестѣ переложить 8 спичекъ такъ, чтобы получилось 4 квадрата. d) Наконецъ, переложить 8 спичекъ такъ, чтобы получилась мельница.



Фиг. 43.

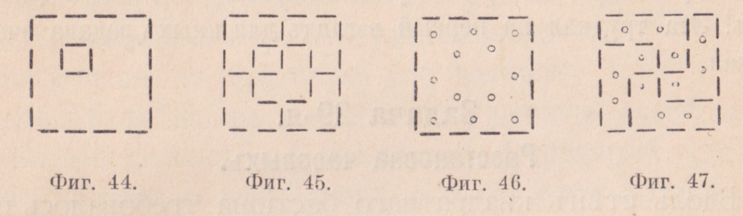
Рѣшеніе.

Всѣ требуемыя рѣшенія означены соотвѣтствующими буквами *a*, *b*, *c* и *d* на фиг. 43-ей.

Задача 27-я.

Дѣлежъ сада.

Изгородь квадратнаго сада составлена 16 спичками (фиг. 44). Въ ней находится домъ, представленный квадратомъ изъ 4-хъ спичекъ. Требуется раздѣлить садъ (безъ дома) между 5-ю наслѣдниками, при помощи 10-ти спичекъ, такъ, чтобы каждый получилъ части одинаковыя по величинѣ и по формѣ.



Фиг. 44. Фиг. 45. Фиг. 46. Фиг. 47.

Рѣшеніе.

См. фиг. 45-ю.

Предложенную задачу можно видоизмѣнить и такъ:

4 брата получили отъ дяди въ наслѣдство садъ (обнесенный 16 спичками), въ которомъ находится 12 плодовыхъ деревьевъ (чѣмъ-либо обозначенныхъ), расположенныхъ, какъ указано на рисункѣ. Требуется 12 спичками раздѣлить садъ на 4 равныя части одинаковой формы, содержащія по равному числу деревьевъ.

Рѣшеніе ея дается фиг. 47-ой.

Задача 28-я.

Сообразите-ка!

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Кладутъ произвольное, не очень малое, количество спичекъ въ рядъ, надписываютъ надъ 9 спичками, слѣ-

дующими другъ за другомъ, числа отъ 1 до 9 и просятъ кого-нибудь изъ присутствующихъ замѣтить одно изъ этихъ 9 чиселъ. Взявъ въ умѣ какое-нибудь не особенно малое число (напримѣръ, 23), считаютъ про себя отъ 9 далѣе вправо: 10, 11, 12 и т. д. до 23; если рядъ оканчивается, продолжаютъ счетъ, переходя къ началу ряда (у насъ придется считать до спички, помѣченной 4). Затѣмъ вы говорите партнеру, замѣтившему число: «Считайте отъ своего числа послѣдовательно по спичкамъ до 23, переходя къ началу ряда, если не хватитъ спичекъ. Когда вы скажете 23, то укажете на спичку № 4.

Подумайте немного, и вы убѣдитесь, что такъ оно и должно быть! Эта трудная на первый взглядъ для иныхъ задача очень легкая.

Задача 29-я.

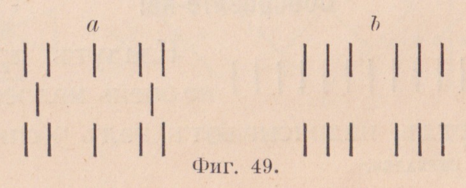
Разстановка часовыхъ.

Вдоль стѣнъ квадратнаго бастіона требовалось поставить 12 часовыхъ. Полковникъ расмѣстилъ ихъ, какъ указано на рисункѣ (фиг. 48), по 4 съ каждой стороны. Затѣмъ пришелъ комендантъ и, недовольный размѣщеніемъ часовыхъ, распорядился разставить солдатъ такъ, чтобы съ каждой стороны было по 5. Вслѣдъ за комендантомъ пришелъ генералъ, разсердился на коменданта за его распоряженіе и размѣстилъ солдатъ по 6 человѣкъ съ каждой стороны. Каково было размѣщеніе въ двухъ послѣднихъ случаяхъ?

Фиг. 48.

Рѣшеніе.

Рѣшеніе даются размѣщеніями *a* и *b* на фиг. 49.



Фиг. 49.

Задача 30-я.

Хитрецы.

Въ корчмѣ стояло четыре стола, образуя четыреугольникъ. Проголодавшіеся, возвращавшіеся съ маневровъ, солдаты остановились тамъ въ числѣ 21 человѣка пообѣдать и пригласили къ обѣду хозяина. Разсѣлись всѣ такъ: за тремя изъ столовъ сѣли солдаты— по 7 за каждый столъ (фиг. 50), а за четвертымъ столомъ сѣлъ хозяинъ. Солдаты уговорились съ хозяиномъ, что платить по счету будетъ тотъ, кто останется послѣднимъ при слѣдующемъ условіи: считая въ круговую (по часовой стрѣлкѣ) всѣхъ, въ томъ числѣ и хозяина, освобождать каждаго седьмого. Каждый освобожденный уходилъ изъ корчмы, и послѣднимъ остался самъ хозяинъ. Съ кого начали счетъ?

Фиг. 50.

Съ кого нужно было бы начать, если бы солдатъ было только по 4 за каждымъ изъ трехъ столовъ?

Рѣшеніе.

Надо начинать счетъ съ 6-го солдата, сидящаго по лѣвую руку отъ хозяина. Во второмъ же случаѣ—съ 5-го изъ солдатъ направо отъ хозяина.

Задача 31-я.

Предложите кому-либо взять въ каждую руку по равному какому угодно числу спичекъ (или какихъ-либо иныхъ предметовъ). Это число вамъ неизвѣстно. Предложите партнеру переложить изъ правой руки въ лѣвую то число предметовъ, которое вы ему скажете, (напр. число a). Затѣмъ, ничего не показывая и не го-

воря вамъ, пусть онъ отложитъ изъ лѣвой руки столько спичекъ, сколько у него осталось въ правой; и, наконецъ, опять-таки ничего вамъ не показывая, пусть отложитъ въ сторону всѣ спички изъ правой руки. Теперь вы можете смѣло утверждать, что у вашего партнера осталось въ лѣвой рукѣ всего $2a$ спичекъ.

Напримѣръ: Пусть партнеръ возьметъ по 15 спичекъ въ каждую руку. Вы требуете, чтобы въ лѣвую руку изъ правой онъ переложилъ, напр., 10 спичекъ (Значитъ, у него въ правой осталось 5 сп., а въ лѣвой 25 сп.). Затѣмъ по вашему требованію онъ изъ лѣвой перекладываетъ въ правую столько спичекъ, сколько тамъ есть (т. е. въ правой у него станетъ $5+5=10$ спич.), и всѣ эти спички откладываетъ. Вы и «угадываете», что въ лѣвой рукѣ у него должно остаться $2 \times 10 = 20$ спичекъ.

Рѣшеніе.

Общее рѣшеніе и доказательство этой задачи можетъ найти каждый. Пусть только онъ прослѣдитъ, что̀ въ сущности, дѣлается при послѣдовательномъ перекладываніи и откладываніи спичекъ. Пусть у партнера въ рукахъ по n спичекъ, и вы предлагаете ему переложить изъ правой руки въ лѣвую a спичекъ.

Получается:

I. Въ обѣихъ рукахъ по n спичекъ.

II. Въ лѣвой $n+a$, въ правой $n-a$ спичекъ.

III. Въ лѣвой $(n+a)-(n-a)=2a$ спич., изъ правой же всѣ спички откладываются. Итакъ, всегда въ лѣвой рукѣ получится въ концѣ концовъ удвоенное число тѣхъ спичекъ, которыя вы предложили переложить въ первый разъ.

Задача 32-я.

Вѣрная отгадка.

Иванъ беретъ въ одну руку четное, а въ другую нечетное число спичекъ. Петръ предлагаетъ ему помножить число спичекъ въ правой рукѣ на нечетное

число, а число спичекъ въ лѣвой рукѣ на четное и сказать ему сумму полученныхъ произведеній. Вслѣдъ затѣмъ онъ угадываетъ, въ какой рукѣ у Ивана четное и въ какой нечетное число спичекъ. Какъ это онъ дѣлаетъ?

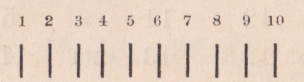
Рѣшеніе.

Если названная сумма—число четное, то у Ивана въ правой рукѣ четное число спичекъ и въ лѣвой — нечетное. Если же эта сумма — нечетнзя, то въ правой рукѣ нечетное число спичекъ.

Доказательство относительно подобнаго рода задачъ см. въ первой книгѣ настоящей Хрестоматіи—задача 94-я.

Задача 33-я.

Собрать въ группы по 2.



10 спичекъ положены въ одинъ рядъ. Требуется распредѣлить ихъ попарно, всего въ 5 паръ, перекладывая по одной спичкѣ черезъ двѣ (напримѣръ, № 1 переложить къ № 4 и т. д.).

Рѣшеніе.

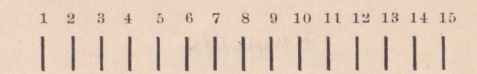
Можно перекладывать такъ: или:

4	къ	1	7	къ	10
7	»	3	4	»	8
5	»	9	6	»	2
6	»	2	1	»	3
8	»	10	5	»	9

Задача 34-я.

Собрать въ группы по 3.

15 спичекъ лежатъ въ рядъ:



Требуется собрать ихъ въ 5 группъ (или кучекъ) по 3 спички въ каждой, при чемъ перекладывать спички по одной и каждый разъ перескакивать черезъ 3 спички.

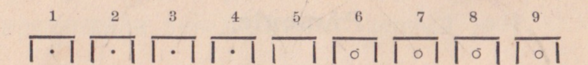
Рѣшеніе.

Обозначимъ положенныя въ рядъ спички соотвѣтственно числами 1, 2, 3....., 15. Тогда задача рѣшается путемъ слѣдующихъ 12-ти переложеній:

2	на	6	4	между	5	и	6
1	»	6	3	»	5	»	6
8	»	12	11	»	5	»	6
7	»	12	13	на	11		
9	»	5	14	»	11		
10	»	5	15	»	11		

Задача 35-я.

Перемѣщеніе лошадей.



Въ конюшнѣ устроено 9 стойлъ въ рядъ. 5-ый номеръ не занятъ: въ номерахъ 1, 2, 3 и 4 находятся черныя лошади (копѣйки), а въ 6, 7, 8 и 9 бѣлыя лошади (гривенники или иные предметы). Требуется перевести бѣлыхъ лошадей въ 1, 2, 3 и 4 номера, а черныхъ въ 6, 7, 8 и 9 на слѣдующихъ условіяхъ: каждая

лошадь можетъ быть переводима въ ближайшее стойло или сосѣднее съ нимъ, но не дальше; никакая лошадь не должна быть возвращаема въ прежнее стойло, и въ каждомъ стойлѣ не можетъ быть больше одной лошади. Начинать съ бѣлой лошади.

Рѣшеніе.

Задача рѣшается въ 24 хода слѣдующими перемѣщеніями:

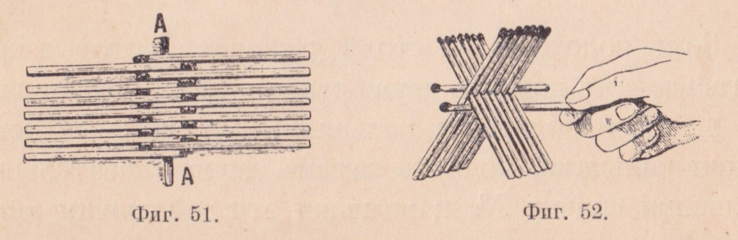
6 въ 5	2 въ 4	4 въ 6
4 » 6	1 » 2	2 » 4
3 » 4	3 » 1	3 » 2
5 » 3	5 » 3	5 » 3
7 » 5	7 » 5	7 » 5
8 » 7	9 » 7	6 » 7
6 » 8	8 » 9	4 » 6
4 » 6	6 » 8	5 » 4

Задача 36-я.

Поднять одной спичкой 15 спичекъ.

Рѣшеніе.

Эта на первый взглядъ трудная задача рѣшается, однако, легко. Положимъ на столъ спичку *A* (фиг. 51), а поперекъ этой спички положимъ затѣмъ вплотную одну около другой, попеременно вправо и влѣво, 14 спичекъ, и именно такъ, чтобы ихъ головки выдавались на 1—$1^1/_2$ сантиметра надъ *A*, въ то время какъ концы безъ головокъ опирались бы на столъ. Сверху, въ



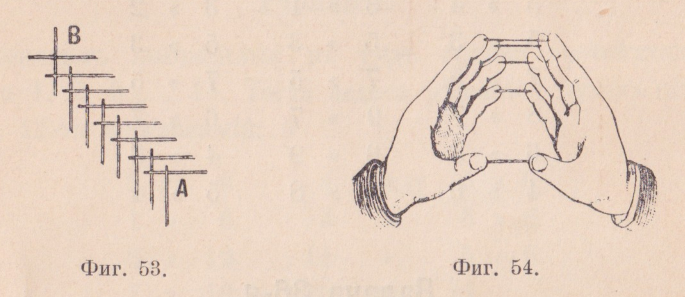
Фиг. 51. Фиг. 52.

углубленіе, образуемое верхними частями спичекъ, кладутъ затѣмъ 16-ю спичку параллельно *A*. Если поднять теперь послѣднюю за конецъ, то къ нашему удивленію вмѣстѣ съ нею поднимутся и остальныя 15 спичекъ (фиг. 52). Для этого опыта удобнѣе брать большія, толстыя четыреугольныя спички.

Задача 37-я.

Спичечный телеграфъ.

Спичечный телеграфъ строится, какъ указано на рисункѣ (фиг. 53). Можно, конечно, удлинить или укоротить его по желанію. Если нажать въ *B*, то *A* подпрыгнетъ.

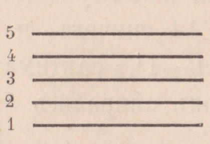


Фиг. 53. Фиг. 54.

Задача 38-я.

Легко или нѣтъ?

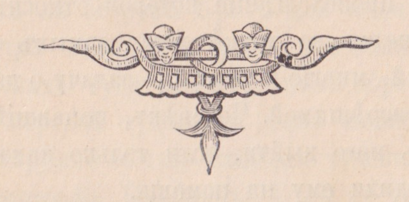
Въ заключеніе этого небольшого отдѣла задачъ со спичками предлагаемъ вамъ продѣлать уже не задачу, а маленькое физическое, что ли, упражненіе.

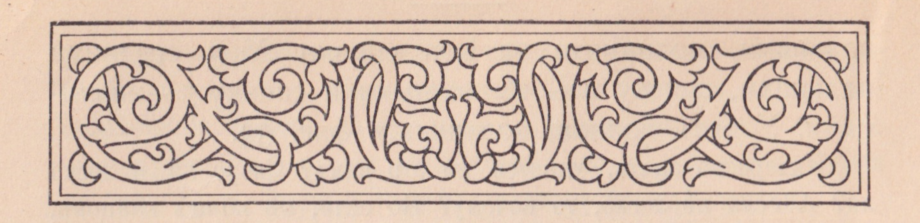


Вотъ положено на столѣ 5 спичекъ, которыя предлагаемъ вамъ поднять двумя руками такъ: сперва спичку № 1 двумя большими пальцами; оставивъ ее между этими пальцами, поднять затѣмъ двумя указательными пальцами спичку № 2; оставляя эти двѣ спички между

пальцами, поднимите затѣмъ спички № 3 средними пальцами, спичку 4—безыменными и спичку 5—мизинцами. У васъ должна получиться фиг. 54.

Интересно знать, удастся ли это вамъ? Скоро ли и легко ли? А если не легко, то почему? Но если, въ концѣ концовъ, это вамъ удалось бы сдѣлать, то попробуйте точно такъ же соотвѣтствующими пальцами обѣихъ рукъ поднять по 2, по 3 спички.





Лабиринты.

Вотъ задача, происхожденіе которой относится къ глубокой древности и теряется во мракѣ легендарныхъ сказаній. Древніе,—да, пожалуй, многіе и теперь,—задачу о лабиринтахъ считали вообще неразрѣшимой. Человѣкъ, попавшій въ лабиринтъ, не могъ уже изъ него выйти, если только какое-либо чудо или случай не приходили ему на помощь.

Изъ настоящей главы мы, наоборотъ, увидимъ, что безвыходныхъ лабиринтовъ нѣтъ, что разобраться и найти выходъ изъ самаго запутаннаго лабиринта не составляетъ особаго труда. Рѣшенію задачи мы предпосылаемъ нѣкоторыя историческія справки о лабиринтахъ. Эти справки, помимо общаго ихъ интереса, докажутъ намъ, съ одной стороны, насколько интересовались этой задачей, а съ другой,—дадутъ наглядное представленіе посредствомъ рисунковъ о существовавшихъ и существующихъ лабиринтахъ.

Слово «**лабиринтъ**», по мнѣнію иныхъ, есть греческая передѣлка египетскаго слова и въ переводѣ означаетъ ходы въ подземельяхъ. Существуетъ, дѣйствительно, очень большое количество природныхъ подземныхъ пещеръ съ такимъ огромнымъ количествомъ по всѣмъ направленіямъ перекрещивающихся коридоровъ, закоулковъ и тупиковъ, что нетрудно въ нихъ заблудиться, потеряться и, не найдя выхода, умереть отъ голода и жажды.

Примѣры такого же рода, но уже искусственныхъ лабиринтовъ могутъ представить шахты иныхъ рудниковъ или такъ называемыя катакомбы.

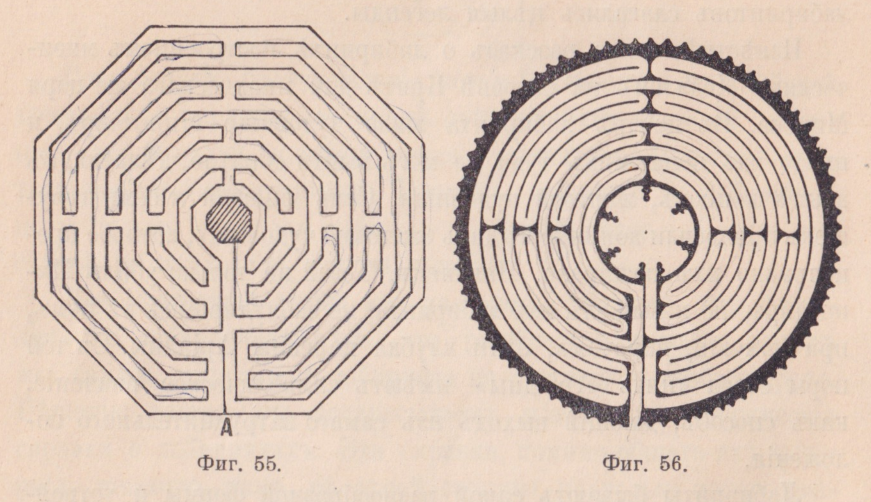
Вѣроятнѣе всего, что подобныя подземелья возбудили у строителей еще древнѣйшихъ временъ охоту подражать имъ искусственными сооруженіями. И у древнихъ писателей мы встрѣчаемъ указаніе на существованіе искусственныхъ лабиринтовъ, напр., у египтянъ. Въ концѣ концовъ, словомъ **лабиринтъ** чаще всего обозначалось именно искусственное чрезвычайно сложное сооруженіе, составленное изъ очень большого числа аллей или галлерей, безчисленныя развѣтвленія, перекрестки и тупики которыхъ заставляли попавшаго туда безконечно блуждать въ лабиринтѣ въ тщетныхъ поискахъ выхода. Объ устройствѣ такихъ лабиринтовъ слагались цѣлыя легенды.

Извѣстнѣе всего разсказъ о лабиринтѣ, построенномъ миѳическимъ Дедаломъ на островѣ Критѣ для миѳическаго же царя Миноса. Въ центрѣ лабиринта жило чудовище Минотавръ, и никто изъ попавшихъ туда не могъ выйти обратно, дѣлаясь, въ концѣ концовъ, жертвой чудовища. Семь юношей и семь дѣвушекъ приносили аѳиняне въ дань ежегодно чудовищу, которое преисправно ихъ пожирало. Наконецъ, Тезей не только убилъ Минотавра, но и вышелъ изъ лабиринта, не заблудившись въ немъ, при помощи, впрочемъ, нити клубка царевны Аріадны. Съ той поры слова «нить Аріадны» имѣютъ символическое значеніе, какъ способъ, дающій выходъ изъ самаго затруднительнаго положенія.

Лабиринты бываютъ самой разнообразной формы и устройства. До нашихъ дней сохранились еще и запутанно-сложные галлереи, и ходы пещеръ, и архитектурные лабиринты надъ могилами, и извилистые планы на стѣнахъ или полахъ, обозначенные цвѣтнымъ мраморомъ или черепицей, и извивающіяся тропинки на почвѣ, и рельефныя извилины въ скалахъ.

Рисунками лабиринтовъ украшались одѣянія христіанскихъ императоровъ до девятаго столѣтія, а остатки такихъ же украшеній сохранились до сихъ поръ на стѣнахъ церквей и соборовъ того времени. Вѣроятно, эти украшенія служили символомъ сложности жизненнаго пути и человѣческихъ заблужденій. Особенно употребительны были лабиринты въ первой половинѣ двѣнадцаго столѣтія.

На фиг. 55-й здѣсь приведено изображеніе одного изъ лабиринтовъ того времени во Франціи, въ церкви святого Квентина. Лабиринтъ этотъ выложенъ изъ камня на полу посреди церкви, и діаметръ его равняется тридцати четыремъ съ половиной футамъ. Путь къ центру здѣсь есть сама линія. Если вести карандашомъ по линіи отъ точки *A* (не обращая вниманія на внѣшнюю окружающую лабиринтъ линію), то вы придете къ центру по длинной извилистой дорогѣ черезъ всю внутреннюю площадь, но сомнѣнія относительно выбора пути у васъ быть не можетъ. Въ подобныхъ случаяхъ эти древніе духовные лабиринты отличаются во-



Фиг. 55. Фиг. 56.

обще не головоломнымъ, а просто продолжительнымъ извилистымъ путемъ, который держитъ васъ все время внутри лабиринта.

Въ церкви аббатства св. Бертина во Франціи есть еще болѣе любопытное изображеніе подобнаго рода на полу, представляющее въ центрѣ Іерусалимскій храмъ, съ остановками для пилигримовъ. Этотъ лабиринтъ дѣйствительно посѣщался пилигримами взамѣнъ путешествія по обѣту въ Святыя Мѣста. Пройти ползкомъ весь путь лабиринта назначалось также вмѣсто эпитиміи.

Лабиринтъ въ Шартрскомъ соборѣ, изображеніе котораго дано фиг. 56, сорока футовъ въ поперечникѣ, также посѣщался кающимися, и они совершали на колѣнахъ его сложный и длинный путь, выполняя наложенную на нихъ эпитимію или обѣтъ.

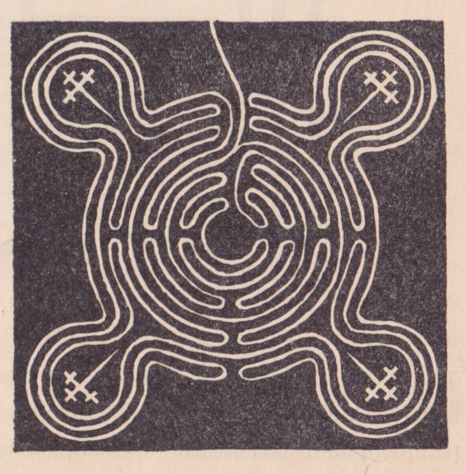
Подобнаго же рода лабиринтъ, но гораздо меньшихъ размѣровъ, помѣщающійся

Фиг 57.

Фиг. 58.

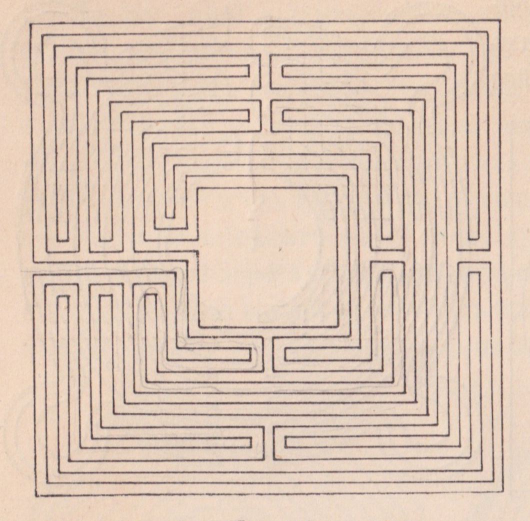
всего на одной плитѣ пола, есть въ каѳедральномъ соборѣ въ Луккѣ (фиг. 57). Въ натуральную величину онъ имѣетъ 19½ дюймовъ въ поперечникѣ.

Другіе подобные лабиринты были и, можетъ быть, существуютъ до сихъ поръ въ аббатствѣ Туссарта въ Шалонѣ-на-Марнѣ, во многихъ древнихъ соборахъ и церквахъ въ Ахенѣ, въ Римѣ, въ Равеннѣ и во многихъ другихъ мѣстахъ. Лабиринты въ церквахъ большею частію назывались «пути въ Іерусалимъ» и служили символомъ труднаго земного путешествія въ Святыя Мѣста, наградой за которое является небесная благодать, поэтому центръ лабиринта часто называли «Небомъ».



Фиг. 59.

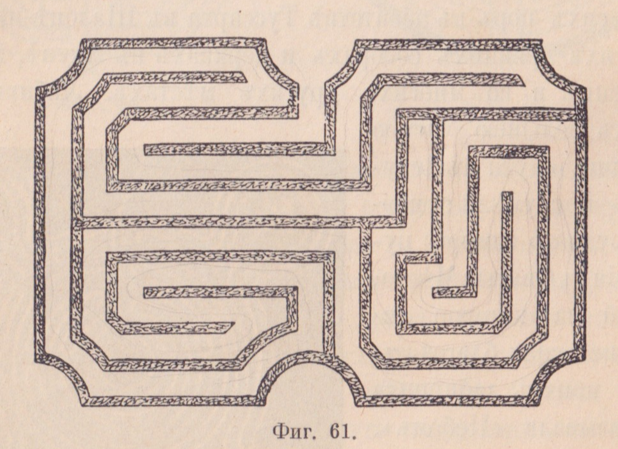
Въ Англіи не встрѣчаются лабиринты на церковномъ полу, но за то было очень много лабиринтовъ, сдѣланныхъ изъ дерна на



Фиг. 60.

лужайкахъ. Они носили различныя названія: «Городъ Троя», «Слѣды пастуха» и т. п. Большинство изъ нихъ находится вблизи церквей или на кладбищахъ, что указываетъ тоже на ихъ духовное происхожденіе. О такихъ лабиринтахъ упоминаетъ Шекспиръ въ своихъ пьесахъ « Сонъ въ лѣтнюю ночь» и «Буря».

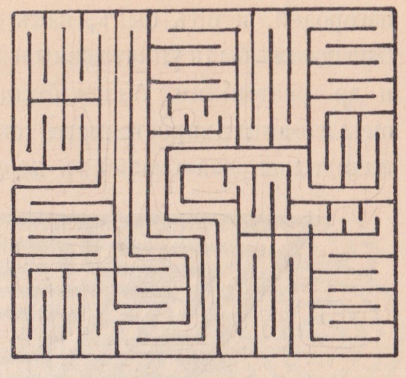
Образцы подобныхъ «дерновыхъ» лабиринтовъ приведены здѣсь на фиг. 58 и фиг. 59. Изъ нихъ первый (фиг. 58) въ графствѣ Эссексъ имѣлъ 110 футовъ въ діаметрѣ, а второй (фиг. 59) въ Ноттингеймширѣ 51 футъ въ діаметрѣ съ линіей пути въ 535 ярдовъ длины (Линіи извилистыхъ путей обоихъ этихъ



Фиг. 61.

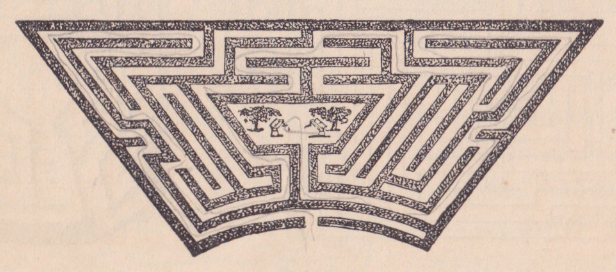
лабиринтовъ ясно видны на чертежѣ). Оба эти лабиринта были взрыты плугомъ и уничтожены въ 1797 году. Для полноты и разнообразія возьмемъ еще образецъ итальянскаго лабиринта 16 столѣтія (фиг. 60), лабиринтъ, взятый изъ книги англійскаго

писателя 1706 года (фиг. 61) и, наконецъ, датскій лабиринтъ тѣхъ же временъ (фиг. 62).



Фиг. 62.

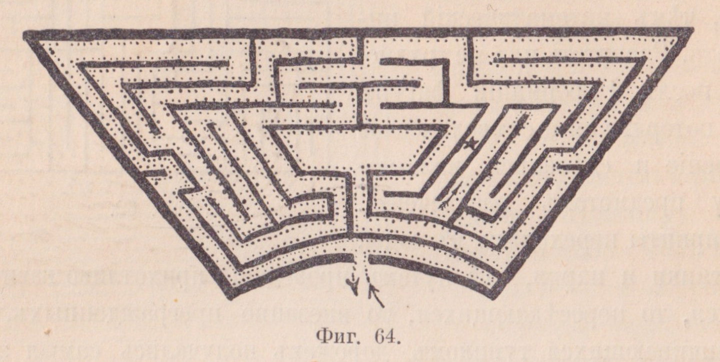
Всѣ вышеприведенные лабиринты имѣютъ болѣе исторический, чѣмъ математическій интересъ. Распутать ихъ не трудно. Но послѣ Реформаціи фигуры эти потеряли свое символическое значеніе и сдѣлались мало-помалу предметомъ развлеченія. Лабиринты переходятъ въ сады, цвѣтники и парки, гдѣ путемъ проведенія прихотливо извивающихся, то пересѣкающихся, то внезапно прегражденныхъ, или заканчивающихся тупикомъ дорожекъ получались самыя запутанныя и головоломныя фигуры, въ которыхъ, дѣйствительно, нелегко было найти дорогу отъ края къ центру, и гдѣ трудно было не заблудиться. Изъ такихъ затѣйливыхъ садовъ если не самый головоломный для рѣшенія, то наиболѣе извѣстный былъ лабиринтъ одного изъ дворцовыхъ садовъ англійскаго короля Вильгельма III. Вотъ что можно прочесть о немъ въ **Encyclopaedia Britannica** подъ словомъ «Labyrinth», съ соотвѣтствующимъ рисункомъ (фиг. 63):



Фиг. 63.

«Лабиринтъ въ садахъ дворца Хэмптонъ - коуртъ считается однимъ изъ самыхъ красивыхъ въ Англіи. Онъ былъ устроенъ въ первую половину царствованія Вильгельма III, хотя нѣкоторые предполагаютъ, что онъ существовалъ тамъ со времени Генриха VIII. Въ саду переплетается цѣлая система аллей и

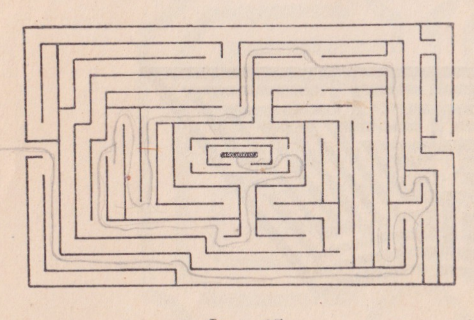
изгородей, и онъ былъ, какъ говорятъ, обсаженъ грабами, которые потомъ были уничтожены и замѣнены остролистниками, тисами и др. растеніями. Аллеи были около полмили длиной, а весь онъ занималъ пространство около четверти акра. Въ центрѣ находились два большихъ дерева со скамейками около нихъ».



Фиг. 64.

Способъ пройти къ этому центру и выйти изъ сада состоялъ въ томъ, чтобы, вступивъ въ лабиринтъ, съ перваго же шага и до конца касаться изгороди правой рукой. Пройденный такимъ образомъ путь обозначенъ у насъ линіей, состоящей изъ точекъ, на фиг. 64.

Слѣдующій лабиринтъ (фиг. 65) во владѣніяхъ маркиза Солсбери (Hatzfield



Фиг. 65.

Фиг. 66.

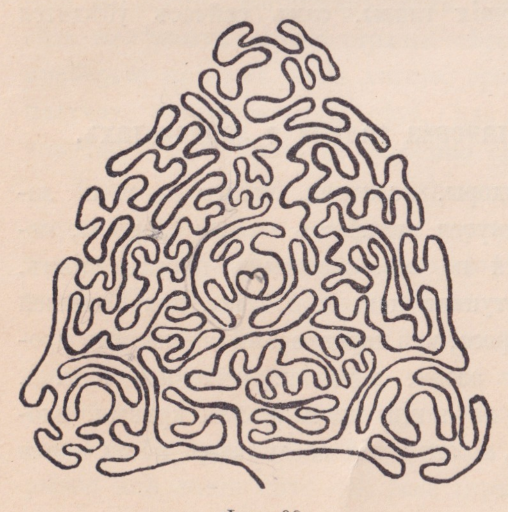
House) хоть и сложнѣе предыдущаго, но довольно легко рѣшается на бумагѣ. Другое дѣло получится, если мы вздумали бы обойти его въ дѣйствительности, не имѣя плана, или не руководствуясь извѣстной системой. Лабиринтъ, представленный здѣсь на фиг. 66, былъ устроенъ королевскимъ обществомъ садоводства въ

южномъ Кессингтонѣ (Англія) и нынѣ не существуетъ. Онъ очень простъ, хотя и имѣетъ три входа, изъ которыхъ обозначенный буквой *А* ведетъ почти прямо къ центру.

Вотъ еще образецъ (фиг. 67) нѣмецкаго лабиринта—изящнаго, но въ сущности незамысловатаго, и, наконецъ, на фиг. 68 представленъ интересный образчикъ лабиринта въ графствѣ Дорсетъ. Онъ состоялъ изъ грядъ холмиковъ (около фута высоты) и занималъ около акра площади земли. Въ 1730 году лабиринтъ этотъ былъ запаханъ, и земля, очевидно, была обращена на болѣе производительный предметъ.

Фиг. 67.

Приведенныхъ образцовъ лабиринтовъ и историческихъ справокъ, полагаемъ, достаточно, чтобы доказать, насколько старъ вопросъ о лабиринтахъ и вмѣстѣ съ тѣмъ, насколько многихъ онъ интересовалъ въ свое время. Люди изощрялись въ изобрѣтеніи самыхъ замысловатыхъ и «безвыходныхъ» лабиринтовъ. Но, въ самомъ дѣлѣ, возможно ли построить или даже начертить **безвыходный** лабиринтъ?—т. е. такой, въ которомъ найти путь къ его «центру» и найти отсюда обратный выходъ было бы только дѣломъ удачи, случая, счастья, а не совершенно опредѣленнаго и правильнаго математическаго расчета? Съ этой послѣдней точки зрѣнія вопросъ пріобрѣтаетъ не только теоретическій, но и большой практическій интересъ. Въ сущности, устройство нашихъ городовъ, сѣтей желѣзныхъ



Фиг. 68.

дорогъ, каналовъ рѣкъ, телеграфовъ и т. д.—все это болѣе или менѣе сложные лабиринты. И если взглянуть на дѣло съ этой стороны, то задача о распутываніи любого лабиринта можетъ считаться не однимъ только «развлеченіемъ»...

Итакъ, представляется вопросъ: есть ли безвыходные лабиринты, или въ каждомъ лабиринтѣ, руководясь общими извѣстными правилами, можно разобраться, свободно войти въ него, посѣтить любую данную въ немъ точку (если она, конечно, не вполнѣ отдѣлена отъ всей системы непроходимой стѣной) и затѣмъ выйти обратно?

Разрѣшеніе этого вопроса принадлежитъ сравнительно позднѣйшему времени, и начало ему положено знаменитымъ Эйлеромъ. Результаты произведенныхъ въ этомъ отношеніи изысканій привели къ заключенію, что

Нѣтъ безвыходныхъ лабиринтовъ.

Разрѣшеніе каждаго лабиринта можетъ быть найдено и притомъ сравнительно простымъ путемъ. Внимательный читатель, преодолѣвшій нижеслѣдующія главы, самъ сейчасъ убѣдится въ этомъ.

Геометрическая постановка задачи о лабиринтахъ.

Аллеи, дорожки, коридоры, галлереи, шахты и т. п. лабиринта, какъ знаемъ, тянутся, изгибаясь во всѣ стороны, перекрещиваются, расходятся по всевозможнымъ направленіямъ, отвѣтвляются, образуютъ тупики и т. д. Но мы, для большей ясности разсмотрѣнія вопроса, всѣ **перекрестки** обозначимъ просто **точками,** а всѣ эти аллеи, дорожки, коридоры и т. д. будемъ принимать просто за линіи, прямыя, или кривыя, плоскія или нѣтъ—все равно, но эти линіи соединяютъ наши точки (перекрестки) двѣ по двѣ.

Вслѣдъ затѣмъ мы говоримъ, что эти точки и эти линіи вмѣстѣ составляютъ **геометрическую сѣть,** или **лабиринтъ,** если какая либо точка, движущаяся по линіямъ этой сѣти, можетъ придти къ любой другой точкѣ, не покидая линій нашей системы (или сѣти).

Усвоивъ это, покажемъ теперь, что

подобная движущаяся точка (представляющая, напр., человѣка) можетъ послѣдовательно описать всѣ линіи сѣти безъ всякихъ скачковъ и перерывовъ, и при этомъ по каждой линіи сѣти она пройдетъ не болѣе двухъ разъ.

Другими словами, — лабиринтъ всегда можетъ быть разрѣшенъ.

Но еще раньше, чѣмъ приступить къ этому доказательству, можно доставить тебѣ довольно интересное математическое развлеченіе, которое поможетъ уяснить все предыдущее и будетъ весьма полезно для усвоенія самаго доказательства. На листѣ бѣлой бумаги возьмите произвольно нѣсколько точекъ и соедините ихъ двѣ по двѣ столько разъ, сколько хотите, произвольнымъ числомъ прямыхъ или кривыхъ линій, но такъ, чтобы ни одна точка системы не осталась совершенно изолированной. Итакъ, вы получите то, что мы назвали геометрической сѣтью. Или нарисуйте, напримѣръ, сѣть трамваевъ или конокъ города, сѣть желѣзныхъ дорогъ страны, сѣть рѣкъ и каналовъ и т. д., прибавьте къ нимъ, если хотите, границы страны, — вы опять получите геометрическую сѣть, или лабиринтъ (Для начала, конечно, лучше брать не особенно сложную сѣть).

Теперь на кускѣ непросвѣчивающей бумаги, или картона, вырѣжьте небольшое отверстіе, черезъ которое была бы видна только небольшая часть составленной вами рѣшетки, или лабиринта. Безъ такого приспособленія въ глазахъ рябитъ, и легко запутаться въ сѣти. Затѣмъ прибавьте окуляръ (отверстіе для глаза) вашего «экрана» на какой либо перекрестокъ (точку) вашей сѣти, — наприм., точку, которую назовемъ *A*, — и сдѣлайте себѣ такое заданіе: обѣжать этимъ окуляромъ непрерывно **всѣ** линіи сѣти два раза (пройти каждый путь впередъ и назадъ (и возвратиться въ точку *A*. Чтобы помнить уже пройденныя окуляромъ линіи, примите за правило на каждой проходимой линіи ставить поперечную черточку при входѣ въ перекрестокъ и при выходѣ изъ него. Отсюда слѣдуетъ, что двѣ оконечности каждаго пути отъ перекрестка до перекрестка (отъ

точки до точки) послѣ выполненія заданія (пройти каждую сѣть линіи 2 раза) должны быть обозначены 2-мя поперечными черточками, но не болѣе.

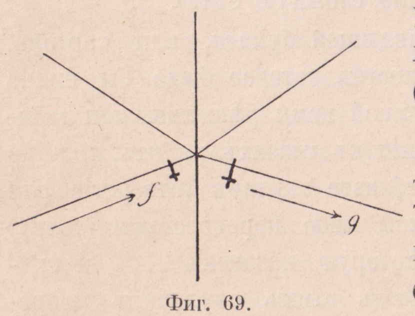
Если мы имѣемъ дѣло съ дѣйствительнымъ лабиринтомъ, или галлереями подземныхъ шахтъ, съ развѣтвленіями пещеръ и т. д., то блуждающему въ этихъ шахтахъ вмѣсто черточекъ на бумагѣ придется дѣлать уже иной знакъ, чтобы оріентироваться, и класть, напримѣръ, камень при входѣ и выходѣ изъ каждаго перекрестка,—въ галлереѣ, которую онъ покидаетъ, и въ той, въ которую онъ входитъ.

Но поставленное только что заданіе и есть въ сущности задача о лабиринтахъ, а потому обратимся къ доказательству, что всякій лабиринтъ разрѣшимъ, что нѣтъ «безвыходнаго» лабиринта.

Рѣшеніе задачи.

Правило I. — Отправляемся отъ начальнаго пункта (перваго перекрестка) и идемъ по какой угодно дорогѣ, пока не приходимъ или въ тупикъ, или къ новому перекрестку. Тогда:

1°. Если окажется, что мы попали въ тупикъ, то возвращаемая назадъ, и пройденный путь долженъ быть уже отброшенъ, такъ какъ мы его прошли два раза (впередъ и обратно).



Фиг. 69.

2°. Если же мы приходимъ къ новому перекрестку, то направляемся по новому произвольному пути, не забывая только всякій разъ отмѣтить поперечной черточкой путь, по которому мы прибыли, и путь, по которому отправились дальше.

Все это пояснено на фиг. 69-ой, гдѣ мы движемся въ направленіи, показанномъ стрѣлкой *f*, приходимъ къ пересѣченію путей и беремъ направленіе, обозначенное стрѣлкой *g*.

Но тотъ и другой путь мы обозначаемъ черточкой, или крестикомъ (При чемъ крестикъ обыкновенно ставится, чтобы обозначить второй, позднѣйшій, путь).

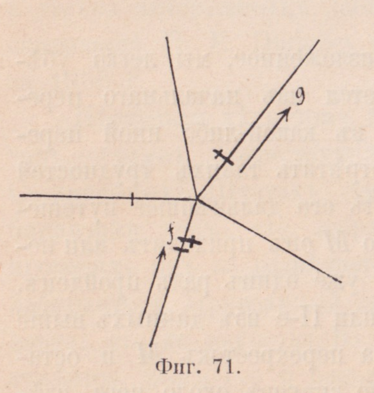
Мы слѣдуемъ указанному выше первому правилу всякій разъ, когда приходимъ на такой перекрестокъ, на которомъ мы еще не были. Но, въ концѣ концовъ, мы необходимо должны придти къ перекрестку, на которомъ мы уже были, и здѣсь можетъ представиться два случая. На извѣстный намъ пунктъ мы проходимъ по дорогѣ, уже разъ пройденной нами, или же по пути новому, не отмѣченному еще черточкой. Въ такомъ случаѣ слѣдуетъ придерживаться такихъ правилъ:

Правило II. — Прибывъ на извѣстный уже намъ перекрестокъ по новой дорогѣ, мы должны сейчасъ же повернуть обратно, предварительно отмѣтивъ этотъ путь двумя черточками (прибытіе и обратное отправленіе),

как̑ъ это указано на фиг. 70-ой.

Фиг. 70.

Правило III.—Если мы приходимъ на извѣстный намъ перекрестокъ такимъ путемъ, которымъ мы уже разъ прошли раньше, то, отмѣтивъ этотъ путь второй черточкой (или крестикомъ), отправляемся дальше путемъ, которымъ мы еще не шли, если только такой путь существуетъ.



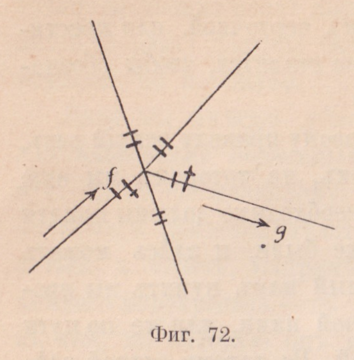
Фиг. 71.

Этотъ случай изображенъ на фиг. 71-ой.

Но если такого пути нѣтъ, то выбираемъ дорогу, по которой прошли только одинъ разъ.

Случай этотъ изображенъ на фиг. 72-ой.

Придерживаясь точно указанныхъ правилъ, мы необходимо обойдемъ 2 раза всѣ линіи сѣти и придемъ въ точку отпра-



Фиг. 72.

вленія. Это можно доказать, сдѣлавъ и уяснивъ себѣ предварительно такія замѣчанія:

1°. Выходя изъ точки отправленія, скажемъ *A*, мы ставимъ начальный знакъ (поперечную черточку или крестикъ).

2°. Прохожденіе черезъ перекрестокъ по одному изъ предыдущихъ 3-хъ правилъ каждый разъ добавляетъ **два** знака (двѣ поперечныя черточки) на линіяхъ, которыя сходятся въ этой точкѣ.

3°. Въ любой моментъ прохожденія лабиринта, передъ прибытіемъ на какой либо перекрестокъ, или послѣ отправленія изъ него, начальный перекрестокъ (пунктъ отправленія) имѣетъ **нечетное** число знаковъ (черточекъ и крестиковъ), а всякій другой перекрестокъ имѣетъ ихъ **четное** число.

4°. Въ любой моментъ, до или послѣ прохода черезъ перекрестокъ, начальный перекрестокъ имѣетъ **только одинъ** путь, обозначенный только одной черточкой. Всякій же иной изъ посѣщенныхъ уже перекрестковъ можетъ имѣть только два пути, обозначенныхъ одной черточкой.

5°. Послѣ полнаго обхода лабиринта у всѣхъ перекрестковъ всѣ пути должны имѣть по двѣ черточки. Это, впрочемъ, входитъ прямо въ условіе заданія.

Принявъ во вималіе все вышеизложенное, мы легко убѣдимся, что если кто-либо отправляется изъ начальнаго перекрестка, скажемъ *A*, и прибываетъ въ какой-либо иной перекрестокъ *M*, то онъ не можетъ встрѣтить такихъ трудностей задачи, которыя могли бы остановить его дальнѣйшее путешествіе. Въ самомъ дѣлѣ, въ это мѣсто *M* онъ приходитъ или новымъ путемъ, или путемъ, который уже одинъ разъ пройденъ. Въ первомъ случаѣ прилагается I-е или II-е изъ данныхъ выше правилъ. Во второмъ—вступленіе на перекрестокъ *M* и остановка здѣсь дала бы **нечетное** число знаковъ около него, слѣдовательно, за неимѣніемъ новаго пути надо пойти по уже пройденному одинъ разъ пути, и около перекрестка будетъ четное число знаковъ (если онъ не начальный), по замѣчанію 3°.

Пусть, наконецъ, мы будемъ вынуждены закончить нашъ путь и возвратиться въ начальный перекрестокъ A. Назовемъ эту послѣднюю линію ZA, т. е. она ведетъ изъ перекрестка Z въ начальный A. Этотъ путь долженъ быть необходимо тѣмъ самымъ, которымъ мы отправились первый разъ изъ A, иначе путь можно было бы продолжать. И если теперь мы принуждены имъ же возвратиться въ точку исхода, то это значитъ, что въ перекресткѣ Z нѣтъ уже никакого другого пути, который бы не былъ уже 2 раза пройденъ. Иначе это значило бы, что забыли приложить первую часть правила III-го,—болѣе того, это значило бы, что въ Z есть какой-то путь YZ, пройденный только одинъ разъ по замѣчанію 4°. Итакъ, при послѣднемъ возвращеніи въ A всѣ пути въ Z должны быть отмѣчены 2-мя черточками. Точно также это можно доказать для предшедствующаго перекрестка Y и для всѣхъ остальныхъ. Другими словами, — наше предложеніе доказано, и задача рѣшена.

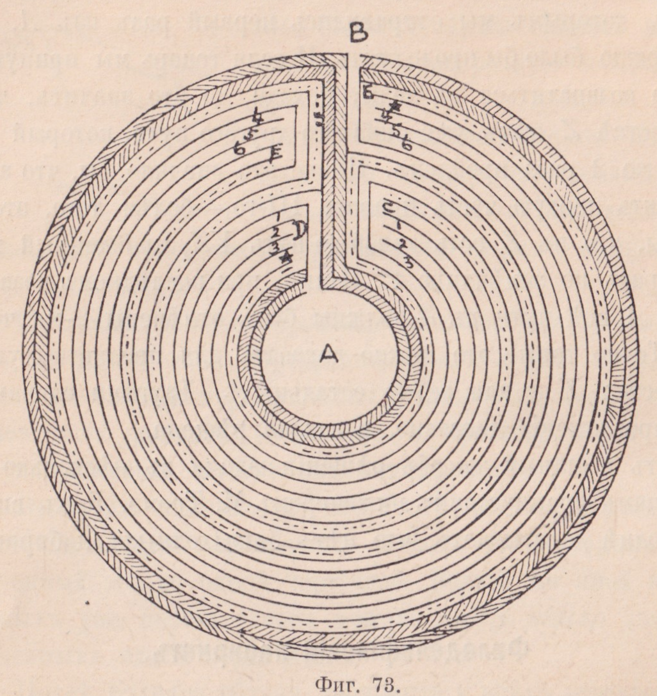
Этотъ изящный способъ рѣшенія задачи въ нѣсколько иной формѣ данъ французскимъ инженеромъ М. Тремо. Какъ видимъ, онъ вполнѣ доказываетъ, что нѣтъ безвыходныхъ лабиринтовъ.

Филадельфійскій лабиринтъ.

Объ одномъ изъ новѣйшихъ, не построенныхъ, впрочемъ, а только начерченныхъ лабиринтовъ поучительную исторію разсказываетъ H. E. Dudeney въ журналѣ «The Strand Magazine» за 1908 г.

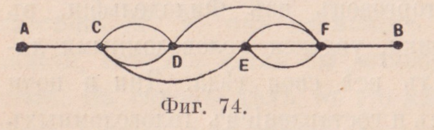
«Нѣсколько лѣтъ тому назадъ,—сообщаетъ упомянутый авторъ, — одинъ странствущій торговецъ изъ Филадельфіи, въ Соединенныхъ Штатахъ Америки, увлекся головоломными лабиринтами такъ, что забросилъ всѣ свои дѣла. Дни и ночи проводилъ онъ за разрѣшеніемъ и составленіемъ головоломныхъ лабиринтовъ. Приводимый здѣсь образчикъ лабиринта (фиг. 73) довелъ его до пьянства. Въ концѣ концовъ онъ помѣшался. Разумѣется, мозги его и раньше были не въ порядкѣ, если такой незначительной причины было достаточно, чтобы окончательно разстроить ихъ».

Во всякомъ случаѣ, отсюда слѣдуетъ вывести поученіе, что лабиринты совсѣмъ ужъ не такая важная вещь, чтобы изъ-за нихъ стоило терять голову. Приводимъ этотъ (фиг. 73), въ буквальномъ смыслѣ слова, «головоломный» лабиринтъ уже съ



Фиг. 73.

готовымъ и упрощеннымъ рѣшеніемъ его: всѣ тупики (слѣпые проходы) въ немъ уже заштрихованы и главнѣйшіе пути указаны точечными или штриховыми линіями. И по рѣшенію, данному на этой фигурѣ, видно, что отъ *A* надо сначала идти къ *C*, и потомъ отъ *F* къ *B*.



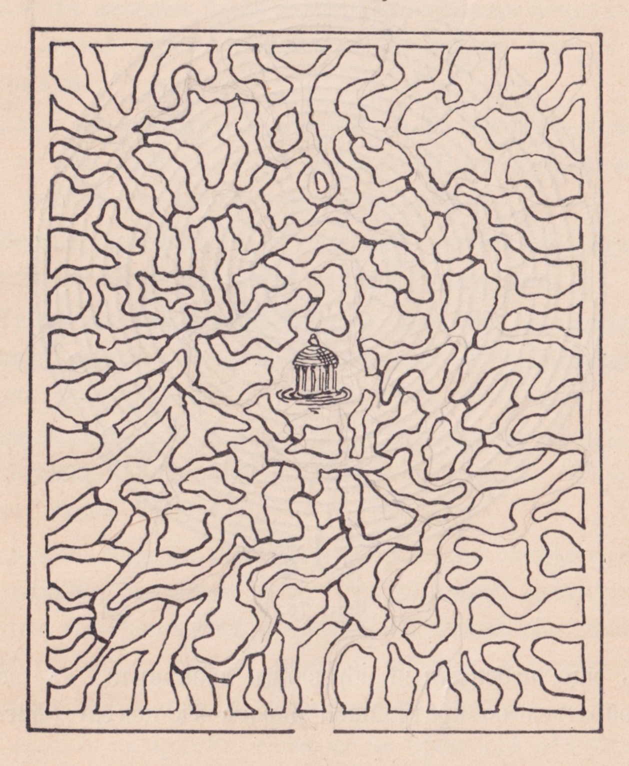
Фиг. 74.

Но, когда мы придемъ къ *C*, у насъ являются три дороги, обозначенныя 1, 2, 3, чтобы дойти до *D*. Точно также, когда мы дойдемъ до *E*, тоже видны три дороги, обозначенныя 4, 5, 6, чтобы дойти до *F*. У насъ есть такимъ образомъ обозначенная точками дорога отъ *C* до *E*, другая—обозначенная точками дорога отъ *D* до *F* и проходъ отъ *D* до *E*, указанный звѣздами. Мы можемъ, слѣдова-

тельно, выразить положенiе дѣла маленькой упрощенной дiаграммой на фиг. 74-ой. Здѣсь всѣ условiя пути соотвѣтствуютъ путямъ кругообразнаго лабиринта, но только болѣе доступны глазу. И вотъ при такихъ-то условiяхъ, при условiи также, которое здѣсь можно выполнить, не проходить дважды черезъ одинъ и тотъ же проходъ, окажется 640 путей отъ *A* до *B*. Для головоломнаго лабиринта это,—не правда ли,—довольно-хорошо.

Задача 39-я.

Хижина Розамунды.



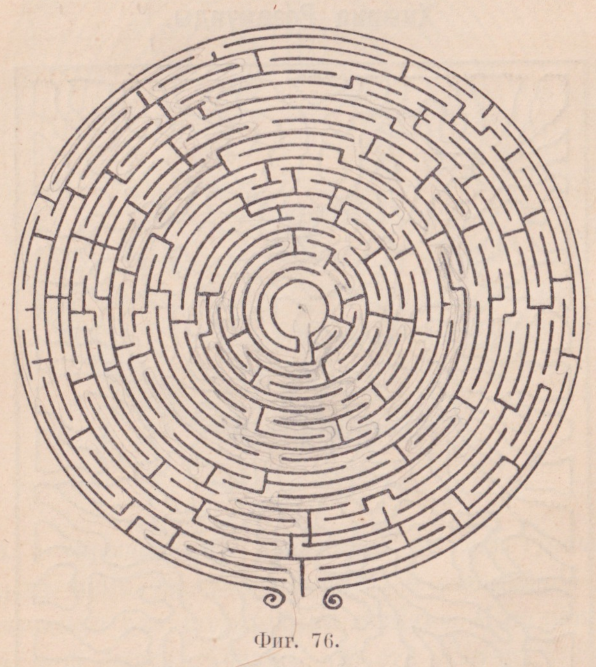
Фиг. 75.

А теперь, почтенный читатель, послѣ изложеннаго уже и, думаемъ, усвоеннаго вами рѣшенiя задачи о лабиринтахъ для васъ будетъ нетрудно найти путь къ хижинѣ прекрасной Розамунды, поселившейся въ паркѣ, изображенномъ на фиг. 75. Если

до сихъ поръ вамъ еще не приходилось слышать о прекрасной Розамундѣ, то, кстати, достаньте книгу и прочтите эту исторію... Быть можетъ, для сокращенія времени вамъ не безполезенъ будетъ совѣтъ начать поиски отъ хижины и найти лучше выходъ изъ этого коварнаго парка, чѣмъ начинать со входа. Впрочемъ, при наличности свободнаго времени это безралично.

Задача 40-я.

Еще лабиринтъ.



Фиг. 76.

Вотъ еще любопытный образчикъ лабиринта, въ которомъ надо пробраться по кратчайшей дорогѣ къ центру (фиг. 76).

Общія замѣчанія.

Задача о лабиринтахъ находится въ непосредственной связи съ задачей Эйлера о мостахъ и островахъ, а также съ сопросомъ о вычерчиваніи однимъ почеркомъ различныхъ фигуръ (уникурсальныя фигуры). На стр. 193—214 третьяго изданія пер-

вой книги настоящей Хрестоматіи эти задачи разобраны довольно подробно. Здѣсь нелишнимъ будетъ привести тѣ общія теоремы, которыя лежатъ въ основѣ подобныхъ задачъ. Условимся прежде всего называть **точкой четнаго порядка** такую точку, изъ которой исходитъ четное число линій, и точкой **нечетнаго** порядка такую, въ которой встрѣчается нечетное число линій. Тогда:

1°. Въ замкнутой фигурѣ можетъ быть только четное число нечетныхъ точекъ,—все равно, уникурсальная эта фигура, или нѣтъ.

2°. Замкнутая фигура, всѣ точки которой суть четнаго порядка, всегда можетъ быть вычерчена однимъ почеркомъ, начиная съ любой изъ ея точекъ; т. е. такая фигура всегда уникурсальна.

3°. Если въ замкнутой фигурѣ не болѣе 2-хъ нечетныхъ точекъ, то она можетъ быть вычерчена однимъ почеркомъ, начиная только съ одной изъ этихъ точекъ.

4°. Замкнутая фигура съ числомъ нечетныхъ точекъ болѣе двухъ не вычерчивается однимъ почеркомъ.

5°. Пусть въ замкнутой фигурѣ есть $2n$ нечетныхъ точекъ, тогда необходимо и достаточно n пріемовъ, чтобы вычертить фигуру.

Доказательство этихъ теоремъ можно найти частью въ 1-й книгѣ настоящей Хрестоматіи, частью у Lucas, «Théorie des Nombres», глава VII.

Изъ этихъ теоремъ вытекаетъ и рѣшеніе задачи о лабиринтахъ — рѣшеніе, сводящее лабиринтъ къ такой замкнутой кривой, которая вычерчивается двойнымъ непрерывнымъ движеніемъ, если каждую линію пройти дважды: впередъ и назадъ.

Такимъ общимъ путемъ, какъ мы уже указали, можетъ быть рѣшенъ всякій лабиринтъ. Если же на практикѣ рѣшеніе можно упростить, то, конечно, слѣдуетъ это дѣлать.

Задача 41-я.

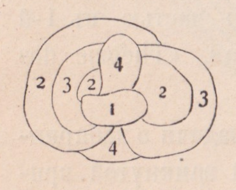
Картографическій вопросъ
или
теорема о четырехъ краскахъ.

Вопросъ, на который мы сейчасъ желаемъ обратить вниманіе читателя, извѣстенъ уже давно всѣмъ, спеціально занимающимся черченіемъ и раскрашиваніемъ географическихъ картъ и плановъ. Состоитъ онъ въ слѣдующемъ:

Для всякой карты достаточно четырехъ различныхъ красокъ, чтобы любыя двѣ области, имѣющія общую пограничную линію, не были окрашены въ одинъ и тотъ же цвѣтъ. При этомъ все равно, сколько бы ни было областей, какъ бы прихотливы ни были ихъ пограничныя очертанія и какъ бы сложно ни было ихъ расположеніе.

Выясненіе задачи.

Изъ прилагаемой фиг. 77 можно убѣдиться, что четыре различныхъ краски дѣйствителано необходимы. Нѣсколькихъ попытокъ, предпринятыхъ въ этомъ направленіи, достаточно для большинства, чтобы убѣдиться въ **невозможности** составить карту съ такимъ расположеніемъ областей, или участковъ, гдѣ потребовалось бы для выполненія условій задачи болѣе четырехъ различныхъ красокъ. Но дать этому послѣднему положенію математическое доказательство—представляетъ совершенно иной вопросъ.



Фиг. 77.

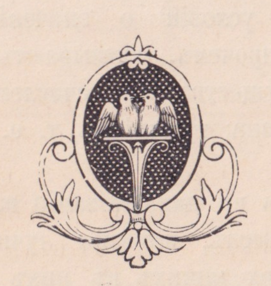
Спеціалистамъ картографическаго дѣла этотъ вопросъ, какъ упомянуто выше, извѣстенъ уже давно. Но какъ математическую теорему, или задачу для рѣшенія, впервые выдвинули его Мёбіусъ въ 1840 году и Гютри, затѣмъ еще болѣе популяризовалъ его Морганъ. Вопросъ получилъ извѣстность и былъ объявленъ, какъ одинъ изъ нерѣшенныхъ, или даже, быть мо-

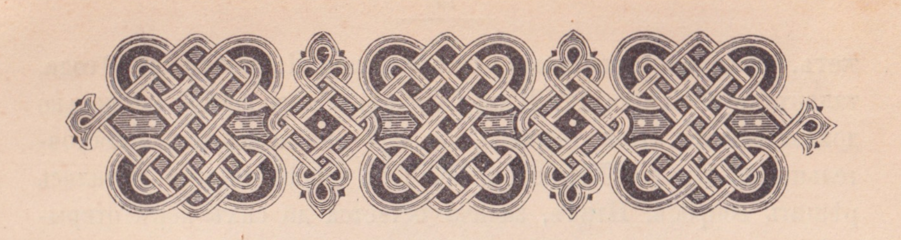
жетъ, неразрѣшимыхъ помощью математики. Начиная съ 1868 года, талантливый математикъ Кэли (Kayley) обнародовалъ нѣсколько доказательствъ этой теоремы, но всѣ они оказались несостоятельными. Профес. Кемпе и проф. Тэтъ также тщетно пытались рѣшить вопросъ. Итакъ, задача остается до сихъ поръ открытой и ждетъ своихъ побѣдителей.

Если бы разсматриваемое нами предположеніе было невѣрно, то это можно было бы обнаружить хотя однимъ какимъ-либо примѣромъ, — наприм., составленіемъ такой «карты» съ пятью или болѣе, областями, гдѣ четырехъ различныхъ красокъ для выполненія заданнаго условія недостаточно. Многіе и попытались это сдѣлать, но... вопросъ такъ и остается открытымъ.

Пока что, доказано только, что существуютъ поверхности, для которыхъ данная теорема не имѣетъ мѣста. Теорема можетъ имѣть мѣсто на плоскости, или на поверхности шара.

Быть можетъ, кто либо изъ нашихъ читателей займется этимъ вопросомъ и будетъ настолько настойчивъ и счастливъ, что разрѣшитъ его! Аналогія этой задачи съ Эйлеровой задачей о мостахъ, съ задачей объ уникурсальныхъ кривыхъ и съ предыдущей задачей о лабиринтахъ напрашивается какъ-то сама собой. Но аналогія въ математикѣ, увы, ничего не доказываетъ.





О весьма большихъ и весьма малыхъ числахъ.

Что такое **билліонъ?**

Въ Англіи, Германіи и въ нѣкоторыхъ иныхъ странахъ сѣверной Европы часто въ основу счета кладутъ группы изъ **шести** знаковъ:

$10^6 = 1\,000\,000 =$ милліонъ; $10^{12} = 1\,000\,000\,000\,000$ билліонъ, $10^{18} =$ трилліонъ и т. д.

Въ Америкѣ и въ южно-европейскихъ странахъ въ основу счета кладется группа изъ **трехъ** цифръ:

$10^6 =$ милліонъ; $10^9 =$ билліонъ; $10^{12} =$ трилліонъ и т. д.

Вопроса о томъ, какая изъ этихъ системъ **правильнѣе,** быть, конечно, не можетъ. Вѣрно и то, и другое. Все дѣло въ разъ навсегда принятомъ условіи о значеніи того или иного **слова**. Англичане, впрочемъ, указываютъ на филологическія, такъ сказать, преимущества ихъ счисленія: **билліонъ**, т. е. **вторая** степень милліона; **трилліонъ**, т. е. **третья** степень милліона и т. д.

Впрочемъ, разница въ наименованіи касается, какъ видимъ, такихъ большихъ чиселъ, которыя лучше всего опредѣлять просто количествомъ входящихъ въ нихъ знаковъ (цифръ), а пототу на практикѣ изъ такого различнаго употребленія въ разныхъ странахъ одного и того же слова не создается затрудненій; и это обыкновенно не отмѣчается даже въ учебникахъ ариѳметики. Но о словѣ **билліонъ** слѣдовало бы упоминать. Слово это приходится слышать часто, а потому надо имѣть въ виду, что оно означаетъ тысячу милліоновъ въ устахъ обита-

телей однихъ странъ и милліонъ милліоновъ въ устахъ обитателей другихъ. Разсказываютъ по этому поводу о безпокойствѣ, а затѣмъ о «радости» французовъ, когда они заключали тяжелый миръ съ побѣдителями, нѣмцами. Рѣчь шла объ огромной контрибуціи въ пять «билліоновъ» франковъ, которую затребовали нѣмцы. Такъ какъ «билліонъ» у нѣмцевъ есть милліонъ милліоновъ (т. е. 10^{12}), а у французовъ онъ равенъ тысячѣ милліоновъ (10^9), то французы, говорятъ, переживали дни тяжелыхъ недоумѣній, пока отъ нѣмцевъ не была получена бумага, гдѣ **цифрами** (5 000 000 000), а не словами, была указана требуемая сумма. И оказалось, что побѣдители на этотъ разъ слово «билліонъ» приняли такъ, какъ понимается оно побѣжденными ими французами. Вотъ почему, пожалуй, было бы полезно разъ навсегда условиться принять вмѣсто слова «билліонъ» французское слово **милліардъ,** какъ названіе тысячи милліоновъ.

Въ наше время различнаго рода «милліардёровъ» слово «милліардъ» или «билліонъ» сдѣлалось привычнымъ и нисколько, вообще говоря, не поражаетъ обывательскаго ума. Нѣсколько иначе къ этому слову отнесется болѣе развитой математически умъ. Онъ скажетъ вамъ, напримѣръ, что отъ начала нашей эры, т. е. отъ Рождества Христова и до 10 час. 40 м. 29 апрѣля 1902 г. протекъ только билліонъ (милліардъ) минутъ.

Если попытаться сосчитать билліонъ (милліардъ $=10^9$) спичекъ, считая по одной и предполагая, что надо употребитъ по секундѣ на спичку, окажется, что, занимаясь такимъ счетомъ по десяти часовъ въ сутки, на этотъ процессъ счета придется употребить 76 лѣтъ!

Если взять билліонъ въ англійскомъ значеніи этого слова, т. е. милліонъ милліоновъ $=10^{12}$, то можно привести еще болѣе разительный примѣръ, который данъ однимъ англійскимъ профессоромъ:

Если, говоритъ этотъ профессоръ,—Адамъ былъ сотворенъ за 4004 года до Р. Х. (библейская хронологія) и если бы онъ могъ считать непрерывно всѣ 24 часа въ сутки, и въ каждую секунду называть три послѣдовательныхъ числа, то, доживя до нашихъ дней, онъ сосчиталъ бы только немногимъ болѣе половины билліона въ англійскомъ смыслѣ этого слова...

Въ повседневномъ обиходѣ намъ приходится обыкновенно встрѣчаться со сравнительно небольшимъ числомъ какихъ-либо предметовъ или съ небольшимъ числомъ ихъ частей. Но въ наукѣ, вообще говоря, мы можемъ встрѣтиться съ числомъ какой угодно величины,—чрезвычайно большой и чрезвычайно малой. Разстоянія неподвижныхъ звѣздъ, скорость свѣта, возрастъ вселенной и т. п. представляютъ примѣры весьма большихъ чиселъ, а размѣры атомовъ, продолжительность ихъ удара одного о другой суть примѣры величинъ другого, чрезвычайно малаго порядка. Но если написано число, съ большимъ количествомъ знаковъ,—скажемъ 15-ти-значное, 20-ти-значное и т. д. число, то нашъ умъ отказывается соединить съ такимъ числомъ какое-либо представленіе; и чтобы «объяснить», такъ сказать, это число, мы должны прибѣгать или къ какимъ либо такимъ новымъ единицамъ сравненія, какъ свѣтовой годъ, или къ инымъ какимъ либо пріемамъ иллюстраціи. Такъ, напр., если мы скажемъ, что въ каплѣ жидкости, висящей на концѣ острія булавки, заключается нѣсколько милліардовъ атомовъ, то это, конечно, дастъ намъ болѣе ясное представленіе о величинѣ атома, чѣмъ если бы мы написали дробь съ единицей въ числителѣ, а въ знаменателѣ ея—огромное многозначное число.

Для поясненія величины нѣкоторыхъ чиселъ существуютъ цѣлые разсказы и даже легенды. Двадцатизначному числу, представляющему безъ единицы 64-ю степень 2, особенно повезло въ этомъ отношеніи. Помимо легенды о браминѣ Сессѣ и повелителѣ Индіи Шеранѣ, разсказанной нами въ 1-й книгѣ этой Хрестоматіи, есть и такая иллюстрація этого числа, предлагаемая Оливеромъ Лоджемъ въ его «Легкой математикѣ».

«Страна, величиной съ Англію, была осаждена непріятельскимъ флотомъ, и ея обитателямъ грозила опасность умереть съ голоду, такъ какъ они не выращивали собственнаго зерна. При этихъ обстоятельствахъ капитанъ одного коммерческаго судна настойчивыми просьбами добился отъ непріятеля пропуска чрезъ блокаду, при чемъ ему разрѣшено было провести шахматную доску, покрытую пшеницей, для его умирающей съ голоду жены и семьи: на первомъ квадратѣ должно было находиться одно зерно, на второмъ—два, на слѣдующемъ—четыре и т. д.

«Но когда непріятельскій адмиралъ сдѣлалъ необходимыя вычисленія при помощи одного японскаго моряка, случайно находившагося на борту, то оказалось, что зерна, которое онъ долженъ былъ пропустить, хватитъ не только, чтобы накормить, но чтобы задушить всѣхъ обитателей страны (Оказалось, что число зеренъ равно 18 446 744 073 709 551 615). Такимъ количествомъ зерна можно было бы покрыть всю землю слоемъ толщиной въ 4 метра.

«Тогда адмиралъ разрѣшилъ пропускъ лишь при томъ условіи, чтобы весь запасъ былъ провезенъ съ одного раза».

Слѣдуетъ замѣтить, впрочемъ, что въ очень многихъ случаяхъ при весьма большихъ числахъ не такъ важно точное численное опредѣленіе величины, какъ **порядокъ** этой величины. «Порядокъ же величины» опредѣляется просто числомъ цифръ, потребныхъ для ея обозначенія.

Задача 42-я.

Довольно большое число!

Съ помощью трехъ девятокъ написать возможно большое число.

Рѣшеніе.

Очень часто въ отвѣтъ на предложенный выше вопросъ пишутъ число 999, но это невѣрно. Точное рѣшеніе вопроса представитъ число:

$$9^{9^{9}}$$

Другими словами, 9 нужно помножить само на себя столько разъ сколько единицъ заключается въ числѣ 9^9. Но

$$9^9 = 387\,420\,489.$$

Итакъ, нужно произвести 387 420 489 умноженій девятки самой на себя, чтобы получить искомое число! Получится «довольно большое число». Но въ остроумной и талантливой книжечкѣ «Initiation mathématique» г. Лэзанъ (Laisant) рѣшительно не совѣтуетъ тратить время на отысканіе этого числа.

«Нѣтъ, рѣшительно не совѣтую вамъ,—говоритъ г. Лэзанъ,— приниматься за эту задачу. Позвольте мнѣ вамъ сказать, и повторите своимъ ученикамъ, которые позже фактически убѣдятся въ этомъ, что число, 9^{9^9}, если бы его написать по десятичной системѣ, имѣло бы

369 692 128 цифръ.

Чтобы написать его на бумажной лентѣ, предполагая, что каждая цифра займетъ 4 миллиметра въ длину, нужно было бы, чтобы эта лента имѣла

1478 километровъ, 772 метровъ, 40 сантиметровъ.

«Это немножко больше удвоеннаго разстоянія отъ Парижа въ Авиньонъ и обратно по желѣзной дорогѣ.

«Необходимое время, чтобы написать это число, полагая по секундѣ на цифру и работая по 10 часовъ въ день, не превысило бы 28 лѣтъ и 48 дней, съ условіемъ включить сюда всѣ воскресенья и всѣ праздники, т. е. не имѣть ни дня отдыха.

«Для большаго освѣдомленія могу вамъ сообщить, что первая цифра искомаго числа 2, а послѣдняя 9. Намъ остается, значитъ, найти не болѣе 369 692 126 цифръ. Вы подумаете, можетъ быть, что облегченіе довольно слабое, я то же думаю. Зато, надѣюсь, согласитесь, что заглавіе «Довольно большое число» поистинѣ оправдало себя...».

Задача 43-я.

Лавины.

Не такъ давно часто бывало (да и теперь это бываетъ), что русскій обыватель неожиданно получалъ письмо отъ неизвѣстнаго даже ему лица съ просьбой переписать присланное письмо въ 5, наприм., копіяхъ и разослать эти пять копій пяти различнымъ лицамъ съ такой же просьбой, т. е. чтобы получившіе въ свою очередь сдѣлали съ письма по 5 копій, разослали ихъ и т. д. Чаще всего подобнымъ образомъ распространяли разнаго сорта «молитвы», — особенно приписываемыя покойному популярному протоіерею Іоанну Сергіеву (Кронштадтскому). Въ

провинціи обыватели на письма такого сорта откликались довольно охотно, пока не надоѣло.

Не особенно давно также, быть можетъ, читателю приходилось встрѣчаться или слышать о ловкой рекламѣ какого-то продавца часовъ. Этотъ господинъ предлагалъ каждому желающему имѣть «даромъ» часы на слѣдующихъ условіяхъ: Продавецъ высылаетъ желающему талонъ съ 6-ю отрѣзными купонами. Пусть получатель убѣдитъ шестерыхъ своихъ знакомыхъ взять по одному купону въ рубль. Деньги эти пересылаются продавцу, а тотъ немедленно за это получателю высылаетъ «даромъ» часы. Но въ свою очередь каждый купившій за 1 рубль купонъ получаетъ отъ продавца талонъ съ шестью купонами: пусть онъ убѣдитъ 6 своихъ знакомыхъ взять 6 купоновъ по 1 рублю, и тогда онъ получитъ тоже часы «даромъ». Въ свою очередь каждый изъ купившихъ купонъ получаетъ книжку съ 6-ю купонами, «убѣждаетъ» шесть своихъ знакомыхъ купить по купону въ 1 рубль, получаетъ часы и т. д.

Своеобразная реклама эта даетъ поводъ къ постановкѣ и рѣшенію слѣдующей интересной задачи, въ которой для большей разительности возьмемъ небольшія числа.

Пусть кто-либо пошлетъ три письма, обозначивъ каждое номеромъ 1. Каждый получившій такое письмо въ свою очередь пусть пошлетъ по 3 копіи съ него, обозначая эти копіи номеромъ 2; каждый получившій эти копіи № 2-й въ свою очередь тоже пошлетъ по 3 копіи съ письма, обозначивъ ихъ номеромъ 3 и т. д. до тѣхъ поръ, пока номеръ разсылаемой копіи не достигнетъ какого либо опредѣленнаго числа, напр., 50. Предположимъ теперь, что каждый, кого просятъ, сдѣлаетъ это и пошлетъ по 3 копіи, предположимъ также, что письма всегда будутъ получать разныя лица, такъ что никто не получитъ письма дважды. Спрашивается, при какомъ номерѣ копіи каждый мужчина, женщина и ребенокъ на всей Землѣ получитъ подобное письмо?

Рѣшеніе.

Пусть искомый номеръ копій будетъ x. Примемъ населеніе земного шара круглымъ счетомъ въ полтора милліарда, т. е. въ 1 500 000 000 человѣкъ. По условію задачи, это число должно получиться, какъ сумма членовъ ряда чиселъ

$$3,\ 3^2,\ 3^3, \ldots 3^x.$$

Рядъ этотъ есть геометрическая прогрессія изъ x членовъ съ знаменателемъ прогрессіи 3. Какъ извѣстно, сумма членовъ такой прогрессіи, S, выражается формулой

$$S = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}.$$

Значитъ, для нашей задачи имѣемъ:

$$\frac{3(3^x - 1)}{2} = 1\,500\,000\,000.$$

Или

$$3^x - 1 = 1\,000\,000\,000 = 10^9.$$

Полученное ур-іе $3^x - 1 = 10^9$ принадлежитъ къ виду такъ называемыхъ показательныхъ уравненій и рѣшается съ помощью логариѳмированія обѣихъ его частей. Для нашей цѣли, очевидно, будетъ совершенно безразлично, если мы пренебрежемъ входящей сюда единицей. Тогда логариѳмированіе даетъ:

$$x \lg 3 = \lg(10^9)$$

и

$$x = \frac{9}{\lg 3} = 18{,}86.$$

Полученное рѣшеніе доказываетъ, что если лавину писемъ указаннымъ въ задачѣ способомъ довести только до копій за № 19, то число писемъ уже превыситъ весь живущій на земномъ шарѣ человѣческій родъ!

Часовщикъ, о которомъ мы говорили выше, очевидно, имѣлъ понятіе о геометрическихъ прогрессіяхъ. Другой вопросъ, однако,

насколько осуществимъ подобный способъ распространенія своихъ товаровъ и даже,—насколько онъ добросовѣстенъ!

Насколько быстро увеличиваются числа въ геометрическихъ прогрессіяхъ, вы поймете также изъ слѣдующей главы.

Прогрессія размноженія.

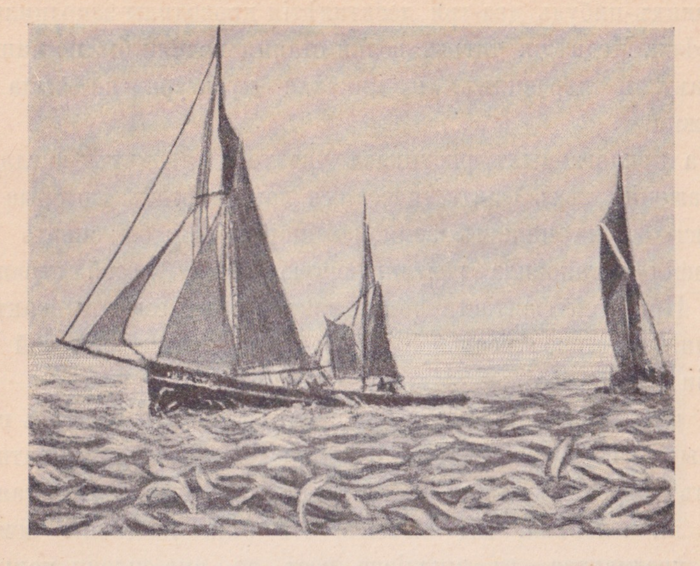
Думали ли вы когда нибудь, что̀ представлялъ бы собой нашъ міръ, если бы въ немъ не было смерти, и всѣ живыя существа размножались бы безпрепятственно? Легко показать, что законъ геометрической прогрессіи размноженія привелъ бы такой міръ къ самому прискорбному состоянію, какое только можно себѣ вообразить. Въ какихъ-нибудь два-три десятилѣтія вся поверхность суши сплошь заростетъ непроходимыми дебрями растеній, въ которыхъ будутъ буквально кишѣть милліарды всевозможныхъ животныхъ, яростно пожирая другъ друга въ борьбѣ за мѣсто. Океанъ, вмѣсто воды, наполнится рыбой до того, что никакое судоходство не будетъ возможно, а воздухъ сдѣлается непрозраченъ отъ птицъ и насѣкомыхъ. Все это будетъ тѣснить другъ друга, безжалостно пожирая и уничтожая, такъ какъ для новыхъ пришельцевъ буквально не будетъ мѣста. Здѣсь будетъ непрерывный вопль и зубовный скрежетъ, и всѣ ужасы Дантова ада поблѣднѣютъ предъ такой картиной.

Цифры и вычисленія показываютъ, что въ такихъ мрачныхъ пророчествахъ нѣтъ ни тѣни преувеличенія. Если бы даже на земномъ шарѣ было первоначально одно растеніе, занимающее не болѣе квадратнаго фута почвы, то и для него вскорѣ не хватило бы мѣста, если бы смерть не уничтожала его потомства. Вообразимъ, что оно даетъ ежегодно всего 50 сѣмянъ — цифра небольшая, такъ какъ многія растенія (макъ, белена и друг.) даютъ ихъ тысячи и десятки тысячъ. Нѣтъ ничего легче, какъ разсчитать, что уже черезъ 9 лѣтъ такое растеніе сплошь покроетъ всѣ 50 милліоновъ квадратныхъ миль поверхности суши. Вотъ ходъ вычисленій, который каждый можетъ провѣрить:

			Число растеній.
Черезъ 1 годъ		1 × 50 =	50
» 2 года		50 × 50 =	2 500
» 3 »		2 500 × 50 =	125 000
» 4 »			6 250 000
» 5 »			312 500 000
» 6 »			15 625 000 000
» 7 »			781 250 000 000
» 8 »			39 062 500 000 000
» 9 »			1 953 125 000 000 000

Число квадратныхъ футовъ поверхности твердой Земли меньше и равно всего 1 421 798 400 000 000. Другими словами, менѣе чѣмъ въ девять лѣтъ растеніе сплошь покроетъ всю Землю, и для дальнѣйшаго размноженія физически не будетъ мѣста. Но многія живыя существа размножаются гораздо быстрѣе, нежели взятое выше для примѣра растеніе. Обыкновенная муха въ теченіе одного лѣта дала бы — не будь въ мірѣ смерти — потомство ни мало ни много, какъ въ двадцать милліоновъ! А въ пять лѣтъ потомство ея выразилось бы умопомрачительнымъ числомъ, состоящимъ изъ 37 цифръ (32×10^{35}). Пауки не уступаютъ мухамъ въ этомъ отношеніи: каждый кладетъ сотни яицъ, и въ нѣсколько лѣтъ пара пауковъ населила бы Землю не меньшимъ числомъ потомковъ, нежели муха,—если бы смерть не уничтожала 99% всѣхъ яичекъ. Еще быстрѣе размножаются тли (Aphis), которыя даютъ около 25 особей въ сутки. Въ какихъ-нибудь 10 дней эти легчайшія, эѳирныя созданія составили бы колоссальную гору тѣлъ, равную по вѣсу билліону людей!

Смерть уничтожаетъ ежегодно не менѣе трехъ четвертей всѣхъ рождающихся птицъ. Не будь этого, каждая пара птицъ въ 15—20 лѣтъ превратилась бы въ тысячи милліоновъ экземпляровъ. Пара голубей уже въ 7 лѣтъ дала бы почти 10 милліоновъ птицъ. Рыбы размножаются не менѣе быстро, нежели обитатели воздушной стихіи. Треска на третьемъ году жизни мечетъ 9 000 000 икринокъ. Легко разсчитать, что если бы всѣ икринки развивались безпрепятственно, то въ нѣсколько лѣтъ треска наполнила бы сплошь моря и сдѣлала бы невозможнымъ мореплаваніе.



Фиг. 78. *Прогрессія размноженія.* Потомство одной трески послѣ трехъ лѣтъ безпрепятственнаго размноженія: 40 милліоновъ особей.

Изъ наземныхъ существъ всего медленнѣе размножается слонъ, но и онъ въ 500 лѣтъ принесъ бы потомство въ 15 000 000 слоновъ. Но если бы всѣ звѣри безпрепятственно размножались, то ужасныя послѣдствія такого положенія вещей сказались бы, конечно, гораздо ранѣе, нежели черезъ столѣтіе:

Фиг. 79. *Прогрессія размноженія.* Потомство пары голубей послѣ семи лѣтъ безпрепятственнаго размноженія: 10 милліоновъ особей.

въ какихъ-нибудь два-три десятилѣтія крокодилы заполнили бы всѣ рѣки. Медвѣди, тигры, волки стаями ходили бы по нашимъ городамъ и деревнямъ, и никакая культура не была бы возможна.

На прилагаемыхъ рисункахъ читатели найдутъ наглядное изображеніе тѣхъ фантастическихъ ландшафтовъ, которые появились бы на нашемъ земномъ шарѣ, если бы смерть хотя на время остановила регулирующую работу своей страшной косы. При всей фантастичности, рисунки эти имѣютъ, какъ мы видѣли, нѣкоторое реальное основаніе въ геометрической прогрессіи размноженія.

А человѣкъ? Въ настоящее время на всемъ земномъ шарѣ круглымъ счетомъ $1^1/_2$ милліарда людей; число квадратныхъ футовъ твердой земли — въ милліонъ разъ болѣе. Полагая по футу на человѣка, мы имѣемъ, что если населеніе земного шара увеличится въ милліонъ разъ, то оно сплошь покроетъ всю сушу, какъ колосья въ полѣ. Какъ скоро наступило бы это, если бы не было естественной смерти? Статистика показываетъ, что средній процентъ рождаемости населенія равенъ $3^1/_2$. Капиталъ, положенный въ банкъ по $3^1/_2$% (сложныхъ), удваивается, какъ извѣстно, каждые 20 лѣтъ; то же будетъ и съ населеніемъ. Сколько же такихъ удвоеній нужно, чтобы населеніе увеличилось въ милліонъ разъ? Рѣшивъ уравненіе

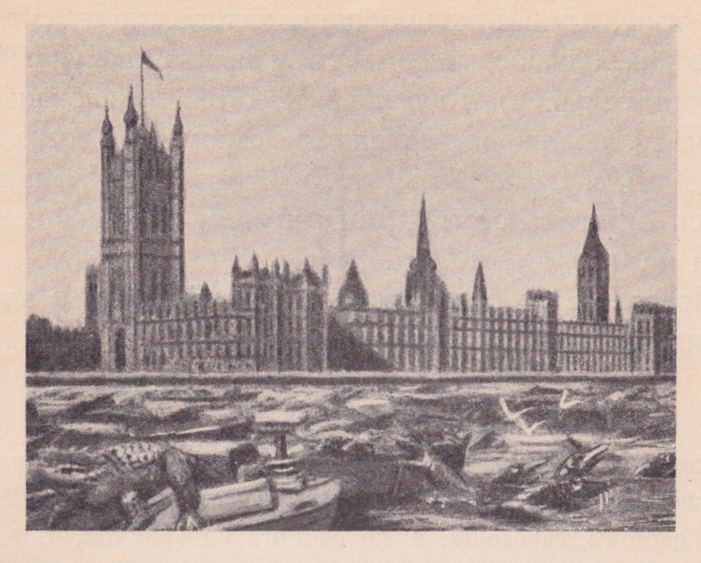
$$2^x = 1\,000\,000,$$

найдемъ, что x равно

$$\frac{\lg 1\,000\,000}{\lg 2} = \frac{6}{0{,}30103} = 19.$$

Другими словами, черезъ $20 \times 19 = 380$ лѣтъ люди сплошь покрыли бы всѣ материки и острова земного шара, не будь естественной смерти. А въ 2400-мъ году по Р. Х. вновь рождающіеся должны были бы уже помѣщаться на головахъ старшаго поколѣнія.

Такъ было бы, если бы люди были безсмертны. Но даже и при настоящихъ условіяхъ возростаніе населенія внушаетъ серьезныя опасенія за будущее. Естественный приростъ насе-



Фиг. 80. *Прогрессія размноженія.* Черезъ 50 лѣтъ безпрепятственнаго размноженія крокодилы заполнили бы всѣ рѣки земного шара. Даже въ Лондонѣ, у набережной Темзы, толпились бы тысячи крокодиловъ.

ленія въ европейскихъ странахъ колеблется отъ 1,8% (въ Россіи) до 0,36% (во Франціи). Принявъ за среднее 1%, легко вычислить, что населеніе будетъ удваиваться каждые 70 лѣтъ ($\lg 2 : \lg 1,01$). Если норма прироста останется неизмѣнной, то послѣ 19 удвоеній, т. е. менѣе, чѣмъ черезъ 1400 лѣтъ, населеніе увеличится въ 1 000 000 разъ, — и на нашей планетѣ не будетъ буквально ни одной пяди свободной земли.

Такова безпощадная прогрессія размноженія!

Задача 44-я.

Загадочная автобіографія.

Въ бумагахъ одного чудака-математика найдена была его автобіографія. Вотъ ея начало:

«Я окончилъ курсъ университета 44-хъ лѣтъ отъ-роду. Спустя годъ, 100-лѣтнимъ молодымъ человѣкомъ, я женился на 34-лѣтней дѣвушкѣ. Незначительная разница въ нашихъ лѣтахъ,—всего 11 лѣтъ,—способство-

вала тому, что мы жили общими интересами и мечтами. Черезъ небольшое число лѣтъ у меня была уже и маленькая семья въ 10 человѣкъ дѣтей. Жалованье я получалъ, положимъ, слишкомъ скромное,—всего 200 рублей въ мѣсяцъ. Изъ этого жалованья $^1/_{10}$ приходилось отдавать сестрѣ, такъ что мы со своей семьей жили на 130 р.», и т. д.

Предлагается объяснить: что за странныя и явныя противорѣчія получаются въ числахъ?

Рѣшеніе.

Разгадка заключается въ томъ, что математику пришла фантазія написать всѣ числа не по привычной и обычной для насъ системѣ счисленія, а по системѣ **пятеричной**, т. е. по такой системѣ, гдѣ въ основаніе положено число **пять**. Другими словами,—въ такой системѣ есть только цифры: 0, 1, 2, 3, 4, а число **5** изобразится уже цифрами **10**. Вступая «въ царство смекалки», слѣдуетъ разъ навсегда усвоить себѣ умѣнье писать числа не только по нашей десятичной системѣ съ десятью цифрами, но и по любой другой. Въ первой книгѣ, въ главѣ о *двоичной* системѣ, объ этомъ сказано вполнѣ достаточно, чтобы не повторяться. Впрочемъ, сейчасъ ниже мы даемъ указанія, какъ отъ десятичной системы счисленія переходитъ къ другой. Теперь же переведемъ языкъ загадочной автобіографіи на нашъ обыкновенный «десятичный» языкъ и тогда увидимъ, что дѣло объясняется просто:

Число, обозначенное въ автобіографіи черезъ 44, равно по десятичной системѣ: $4 \cdot 5 + 4 = 24$; другими словами,—математикъ окончилъ курсъ университета по нашему счету въ 24 года. Точно такъ же:

100	соотвѣтствуетъ десятичному числу	25
35	»	$3 \cdot 5 + 4 = 19$
11	»	$1 \cdot 5 + 1 = 6$
200	»	$2 \cdot 5^2 = 50$
$\frac{1}{10}$	»	$\frac{1}{5}$
130	»	$5^2 + 3 \cdot 5 = 40$

Послѣ этого перевода на нашу десятичную систему всѣ видимыя противорѣчія загадочной автобіографіи исчезаютъ. Теперь ясно, что автобіографію чудака слѣдуетъ «по нашему» читать такъ: «Я окончилъ курсъ университета *24 лѣтъ* отъ-роду. Спустя годъ, *25-лѣтнимъ* молодымъ человѣкомъ, я женился на *19-лѣтней* дѣвушкѣ. Незначительная разница въ *6 лѣтъ*.., и т. д.

Для облегченія чтенія слѣдующей главы сдѣлаемъ здѣсь кстати указанія, какъ числа, написанныя по десятичной системѣ счисленія, писать въ иной системѣ.

Предположимъ, вы желаете число 25 написать по восьмеричной системѣ. Дѣлите 25 на 8 — получаете въ частномъ 3, въ остаткѣ 1. Это значитъ, что число ваше состоитъ изъ трехъ восьмерокъ и одной единицы; слѣдовательно начертаніе его по восьмеричной системѣ будетъ *31*.

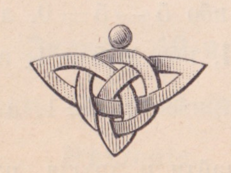
Еще примѣръ: написать 267 по четверичной системѣ. Дѣлите 267 на 4, частное—снова на 4 и т. д., запоминая каждый разъ остатки.

267	4			
3	66	4		
	2	16	4	
		0	4	4
			0	1

Итакъ:

$$268 = 4^4 + 2\cdot 4 + 3 .$$

Мы узнали, что наше число содержитъ три единицы, двѣ четверки (т. е. двѣ единицы второго разряда) и одну единицу *пятаго* разряда. Слѣдовательно, начертаніе его будетъ *10023*



Задача 45-я.

Написать единицу тремя пятерками.

Рѣшеніе.

Задача состоитъ въ томъ, чтобы, пользуясь тремя 5-ками и какими угодно знаками математическихъ дѣйствій, написать выраженіе, равное единицѣ.

Если вы никогда не пробовали рѣшать подобныхъ задачъ, то вамъ не мало придется подумать, прежде чѣмъ вы нападете на одно изъ правильныхъ рѣшеній. Вотъ нѣкоторыя изъ рѣшеній предлагаемой задачи:

$$\left(\frac{5}{5}\right)^5 = 1, \text{ ибо } \frac{5}{5} = 1, \text{ а } 1^5 = 1.$$

$$\sqrt[5]{\frac{5}{5}} = 1, \text{ ибо } \frac{5}{5} = 1, \text{ а } \sqrt[5]{1} = 1.$$

$$5^{5-5} = 1, \text{ ибо } 5 - 5 = 0, \text{ а } 5^0 = 1.$$

$$(\lg_5 5)^5 = 1, \text{ ибо } \lg_5 5 = 1, \text{ а } 1^5 = 1.$$

$$\sqrt[5]{\lg_5 5} = 1, \text{ ибо } \lg_5 5 = 1, \text{ а } \sqrt[5]{1} = 1.$$

Можно пытаться найти и другія рѣшенія, кромѣ этихъ пяти. Ниже мы укажемъ систематическій пріемъ, пользуясь которымъ можно отыскивать всѣ рѣшенія этого типа.

Задача 46-я.

Написать нуль тремя пятерками.

Рѣшеніе.

Задача одного порядка съ предыдущей. Теперь уже читатель безъ труда сможетъ дать отвѣтъ

$$(\mathbf{5}-\mathbf{5})^{5}=\mathbf{0}, \text{ ибо } 5-5=0, \text{ а } 0^{5}=0.$$

Вотъ еще рѣшенія этой же задачи:

$$5\times(5-5);\ \frac{5-5}{5};\ \sqrt[5]{5-5};\ \lg_5\frac{5}{5},\ \lg_5\lg_5 5$$

Задача 47-я.

Написать 2 тремя пятерками.

Рѣшеніе.

$$\frac{5+5}{5}=2 \text{ и } \lg_5(5\times5)=2.$$

Задача 48-я.

Написать 5 тремя пятерками.

Рѣшеніе.

Задача имѣетъ не менѣе десяти рѣшеній:

$$5+5-5;\ 5\times\frac{5}{5};\quad 5^{\frac{5}{5}};\quad \frac{5}{5/5};\ 5\lg_5 5;\quad 5^{\lg_5 5},\ \sqrt[5]{5^5};\quad \lg_5 5^5;$$

$$\frac{5}{\lg_5 5};\ \lg\sqrt[5]{5}$$

Задача 49-я.

Написать 31 пятью тройками.

Рѣшеніе.

Это задача гораздо сложнѣе предыдущихъ. Она не нова, и обыкновенно считаютъ, что она имѣетъ всего три рѣшенія:

$$31 = 3^3 + 3 + \frac{3}{3}$$

$$31 = 33 - 3 + \frac{3}{3}$$

$$31 = 33 - \frac{3+3}{3}.$$

Однако, рѣшеній здѣсь гораздо больше. Мы остановимся подробнѣе на разсмотрѣніи этой задачи, попутно изложивъ методъ, съ которымъ слѣдуетъ приступать ко всѣмъ подобнымъ задачамъ.

Общее рѣшеніе.

Выразить какое-либо число посредствомъ пяти троекъ можно трояко. Во-первыхъ, соединяя тройки знаками математическихъ дѣйствій; во-вторыхъ, пользуясь, наряду съ знаками дѣйствій, еще приписываніемъ троекъ одна къ другой; либо же, наконецъ, пользуясь, наряду съ упомянутыми пріемами, различными математическими символами.

А. Разсмотримъ первый пріемъ. Прежде всего найдемъ всѣ числа, которыя могутъ получиться, какъ результатъ математическихъ дѣйствій надъ пятью тройками,—считая семь дѣйствій: сложеніе, вычитаніе, умноженіе, дѣленіе, возвышеніе въ степень, извлеченіе корня и логариѳмированіе.

Произведемъ сначала послѣдовательно семь дѣйствій надъ **двумя** тройками; получимъ рядъ изъ семи выраженій: $3+3$; $3-3$; 3×3; $\frac{3}{3}$; 3^3; $\sqrt[3]{3}$ и $\lg_3 3$. Для удобства обозначимъ этотъ рядъ римской цифрой I.

Сочетая по очереди каждое изъ выраженій этого ряда опять съ тройкой посредствомъ всѣхъ знаковъ дѣйствій, получимъ новый рядъ чиселъ. Этотъ II-ой рядъ будетъ заключать въ себѣ всѣ числа, которыя можно написать посредствомъ трехъ троекъ по разсматриваемому способу.

Наконецъ, сочетая такимъ же образомъ каждое изъ выраженій I ряда съ каждымъ изъ выраженій II ряда, получимъ всѣ числа (III рядъ), какія могутъ быть написаны **пятью** тройками съ помощью знаковъ дѣйствій.

Въ этой послѣдней таблицѣ мы ищемъ число 31, и находимъ его всего два раза:

$$31 = 3^3 + 3 + \frac{3}{3} \text{ и } 31 = 3^3 + 3 + \lg_3 3.$$

Но такъ какъ число 31 можетъ быть написано и не по десятичной системѣ счисленія, то въ таблицѣ III мы ищемъ вообще число, равное $3a+1$, гдѣ a—любое цѣлое число, могущее быть основаніемъ системы счисленія (но большее, чѣмъ 3, ибо въ троичной системѣ уже нѣтъ цифры 3). Другими словами, мы будемъ искать тѣ числа, которыя безъ единицы дѣлятся на три. Такимъ путемъ найдемъ, что число 31 посредствомъ пяти троекъ можетъ быть выражено слѣдующими способами.

По четверичной системѣ счисленія—два рѣшенія:

$$31 = 3 + (3 \times 3) + \frac{3}{3} \text{ и } 31 = 3 + (3 \times 3) + \lg_3 3.$$

По 6-еричной системѣ—два рѣшенія:

$$31 = 3 \times (3 + 3) + \frac{3}{3} \text{ и } 31 = 3 \times (3 + 3) + \lg_3 3.$$

По 8-ричной системѣ—два рѣшенія:

$$31 = 3^3 - 3 + \frac{3}{3} \text{ и } 31 = 3^3 - 3 + \lg_3 3.$$

По 9-ричной системѣ:

$$31 = 3 \times 3 \times 3 + \frac{3}{3};\ 31 = 3 \times 3 \times 3 + \lg_3 3;$$

$$31 = 3^3 + 3^{3-3};\ 31 = 3^3 + (\lg_3 3)^3$$

$$31 = 3^3 + \sqrt[3]{\frac{3}{3}};\ 31 + 3^3 + \sqrt[3]{\lg_3 3}$$

$$31 = 3^3 + \left(\frac{3}{3}\right)^3 \text{ и друг.}$$

По 27-ричной системѣ—два рѣшенія:

$$31 = 3 \times 3^3 + \frac{3}{3} \text{ и } 31 = 3 \times 3^3 + \lg_3 3.$$

По 72-ричной ситемѣ—два рѣшенія:

$$31=(3+3)^3+\frac{3}{3} \text{ и } 31=(3+3)^3+\lg_3 3.$$

По 243-ричной системѣ—четыре рѣшенія:

$$31=(3\times 3)^3+\frac{3}{3};\ 31=(3\times 3)^3+\lg_3 3;$$

$$31=3^{3+3}+\frac{3}{3};\ 31=3^{3+3}+\lg_3 3, \text{ и т. д.}$$

Словомъ, пользуясь объясненнымъ выше методомъ, можно получить всѣ рѣшенія этого типа. Между прочимъ, весьма интересно рѣшеніе такого вида:

$$\mathbf{31}=\mathbf{3}^{3^3}+\frac{3}{3} \text{ (т. е. } 3\times 3^{26}+1),$$

гдѣ число 31 написано по системѣ счисленія съ основаніемъ 3^{26}. На этомъ примѣрѣ отчетливо выступаетъ преимущество изложеннаго метода: едва ли кому-нибудь пришло бы въ голову это рѣшеніе, если бы онъ не улавливалъ его сѣтями систематическаго метода.

Намъ остается разсмотрѣть остальные два пріема.

B. Приписываніе троекъ одна къ другой даетъ слѣдующія рѣшенія:

$$31=33-3+\frac{3}{3};\ 31=33-3+\lg_3 3$$

$$31=33-\frac{3+3}{3} \text{ и } 31=33-\lg_3(3\times 3).$$

Эти рѣшенія вѣрны при *всякой* системѣ счисленія.

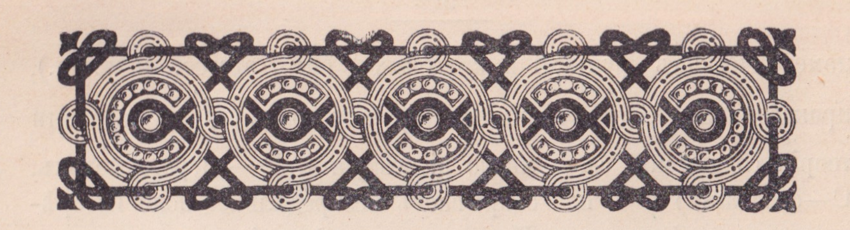
Изъ другихъ рѣшеній этого типа весьма интересны слѣдующія—по 4-ричной системѣ:

$$31=3\times 3,(3)+\frac{3}{3} \text{ и } 31=3\times 3,(3)+\lg_3 3.$$

Здѣсь выраженіе 3,(3) означаетъ «три цѣлыхъ и три въ періодѣ» и равно, по 4-ричной системѣ, $3\frac{3}{3}$, т. е. 4.

C. Этотъ способъ, т. е. пользованіе всевозможными математическими символами—знаками факультета (!), знаками триго-

нометрическихъ функцій и круговыхъ (sin., arcsec. и т. д.), производной ($'$), дифференціала (d), интеграла $\left(\int\right)$, символами теоріи соединеній (A — число размѣщеній, P — перестановокъ, C—сочетаній) и т. п.—открываетъ безпредѣльное поле изобрѣтательности рѣшающаго. Приводить эти рѣшенія мы не станемъ, такъ какъ въ сочетаніи съ предыдущими двумя этотъ пріемъ даетъ задачѣ неопредѣленное множество рѣшеній. Отдѣльные же примѣры подыскать очень легко, и мы предоставляемъ это читателю.



Сто тысячъ за доказательство теоремы.

Осенью 1907 года въ Дарматадтѣ скончался математикъ Пауль Вольфскель (Wolfskehl), оставившій не совсѣмъ обычное завѣщаніе: капиталъ въ 100,000 марокъ онъ завѣщалъ тому, кто докажетъ одну теорему изъ теоріи чиселъ, — теорему, извѣстную подъ названіемъ «великой теоремы (или великаго предложенія) Ферма».

Теорема, за доказательство которой предлагается такой огромный гонораръ, очень проста и можетъ быть изложена въ немногихъ словахъ: сумма одинаковыхъ степеней двухъ цѣлыхъ чиселъ не можетъ быть тою же степенью третьяго цѣлаго числа, если степень больше двухъ. Другими словами, уравненіе:

$$x^n + y^n = z^n$$

неразрѣшимо въ цѣлыхъ числахъ, если $n > 2$.

Для случая, когда $n = 2$, такое уравненіе разрѣшимо (это такъ называемая задача о Пиѳагоровыхъ треугольникахъ, разсмотрѣнныхъ нами при рѣшеніи задачи 10-ой).

Но вамъ никогда не удастся подобрать такія два числа, чтобы сумма ихъ кубовъ была тоже кубомъ, или сумма 4-тыхъ степеней была сама 4-ой степенью, и т. д.

Въ этомъ и состоитъ теорема, именуемая «великимъ предложеніемъ Ферма». Какъ ни проста она съ виду, но строгаго доказательства ея въ математикѣ еще не существуетъ.

Не мало великихъ математиковъ въ свое время трудились надъ доказательствомъ этой неподатливой теоремы, высказанной

Ферма болѣе двухъ съ половиной вѣковъ тому назадъ,—и никому еще не удалось найти общее, строгое ея доказательство для всѣхъ степеней выше второй. И если теперь искомое доказательство оцѣнено такой огромной суммой, то оно вполнѣ заслужило это за свою упорную неуловимость для самыхъ сильныхъ математическихъ умовъ.

Нельзя сказать, чтобы это доказательство было очень ужъ важно для науки. Гауссъ, одинъ изъ величайшихъ математиковъ всѣхъ временъ, относился къ теоремѣ Ферма довольно пренебрежительно. «Признаюсь—писалъ онъ своему пріятелю—что Ферматова теорема, какъ изолированное предложеніе, для меня большого интереса не представляетъ, ибо легко можно придумать множество подобныхъ предложеній, которыхъ нельзя ни доказать, пи опровергнуть».

И, тѣмъ не менѣе, лучшіе математики (да и самъ Гауссъ) бились надъ ея доказательствомъ. Конечно, дѣлалось это неспроста: Ферматова теорема имѣетъ свою крайне любопытную исторію. Она, можно сказать, прямо заинтриговала математиковъ.

Ея авторъ, Пьеръ Ферма (Fermat, 1601 — 1665), юристъ по профессіи, совѣтникъ Тулузскаго парламента по положенію, поэтъ и ученый въ душѣ, занимался математикой лишь между прочимъ, для развлеченія. Это не мѣшало, однако, ему сдѣлать цѣлый рядъ огромной важности открытій, справедливо окружившихъ его славой геніальнаго математика. Онъ почти не печаталъ своихъ трудовъ, а сообщалъ ихъ въ письмахъ къ своимъ друзьямъ, среди которыхъ были такіе ученые, какъ оба Паскаля, Роберваль, Декартъ, Гюйгенсъ и др. Цѣлый рядъ теоремъ изъ области теоріи чиселъ разбросанъ этимъ геніальнымъ диллетантомъ... на поляхъ одной греческой книги! Впрочемъ, авторомъ сочиненія, которому посчастливилось служить записной книжкой для Ферма, былъ никто иной, какъ не менѣе знаменитый александрійскій математикъ Діофантъ, также занимавшійся теоріей чиселъ [1]). Многія изъ теоремъ, найденныхъ

[1]) О жизни этой загадочной личности намъ извѣстно очень мало. Невозможно даже съ точностью установить вѣкъ, когда онъ жилъ: съ увѣренностью можно указать лишь на промежутокъ времени отъ 180 г. до Р. Х. до 370 г. послѣ Р. Хр. см. въ «Царствѣ Смекалки», книга 3-я.

Ферма, записывались имъ безъ доказательствъ. Эти доказательства такъ до насъ и не дошли. Но впослѣдствіи всѣ его теоремы были строго доказаны позднѣйшими математиками, всѣ кромѣ одной,—той самой, о которой у насъ сейчасъ идетъ рѣчь.

Упомянутая замѣтка на поляхъ книги Діофанта написана противъ того мѣста текста, гдѣ александрійскій математикъ говоритъ о разложеніи полнаго квадрата на сумму двухъ квадратовъ. Вотъ буквальный переводъ того, что Ферма записалъ сбоку, на поляхъ:

«Между тѣмъ, совершенно невозможно разложить полный кубъ на сумму двухъ кубовъ, четвертую степень на сумму двухъ четвертыхъ степеней, вообще какую либо степень на сумму двухъ степеней съ тѣмъ же показателемъ. Я нашелъ поистинѣ удивительное доказательство этого предложенія, но здѣсь слишкомъ мало мѣста, чтобы его помѣстить».

Въ чемъ состояло это «поистинѣ удивительное» доказательство,—никто теперь не знаетъ. Но въ то же время ни одинъ математикъ не сомнѣвается, что такое доказательство — дѣйствительно было найдено Ферма, и что оно было вѣрно. Не таковъ былъ человѣкъ Пьеръ Ферма, чтобы покривить душой, и не таковъ онъ былъ математикъ, чтобы ошибаться. Вѣдь всѣ другія теоремы, высказанныя имъ безъ доказательства, были доказаны позднѣйшими математиками. Такова, напримѣръ, теорема: «каждое простое число вида $4n+1$ есть сумма двухъ квадратовъ». Она дана была Ферма безъ доказательства, но сто лѣтъ спустя Эйлеръ нашелъ—довольно сложное и трудное—доказательство ея.

Кажущееся исключеніе, бросающее, повидимому, тѣнь на репутацію Ферма, какъ непогрѣшимаго теоретика чиселъ, составляетъ слѣдующій случай. Ферма высказалъ теорему, что всякое число вида:

$$2^{2^n}+1$$

есть простое число. Въ теченіе цѣлаго столѣтія не возникало сомнѣній въ ея правильности. Но вотъ другой геній теоріи чи-

селъ, Эйлеръ, доказалъ, что теорема вѣрна лишь для $n > 32$, и что уже при $n = 32$ получается число:

4 294 967 297,

которое не простое, а составное, ибо дѣлится безъ остатка на 641.

Однако это не только не подрываетъ вѣры въ добросовѣстность Ферма, но, напротивъ, скорѣе даже утверждаетъ ее. Дѣло въ томъ, что и самъ Ферма сомнѣвался въ абсолютной вѣрности этой теоремы и откровенно заявлялъ, что ему еще не удалось дать исчерпывающее доказательство ея. «Доказательство очень кропотливо—говоритъ онъ—и долженъ признаться, что я еще не довелъ его до удовлетворительнаго завершенія».

Послѣ этого едва ли можно еще сомнѣваться въ томъ, что Ферма дѣйствительно доказалъ свое «великое предложеніе». А если такъ, то вполнѣ возможно, что кому-нибудь посчастливится подыскать доказательство этой теоремы и сдѣлаться обладателемъ кругленькой суммы въ 100000 марокъ.

Маленькая историческая справка покажетъ, впрочемъ, что эти 100 000 едва ли попадутъ въ руки зауряднаго математика. Вотъ краткій перечень того, что̀ уже сдѣлано въ этомъ направленіи.

Прежде всего легко доказать, что если теорема справедлива для показателя n, то она справедлива также и для всякаго другого показателя, кратнаго n. Значитъ, все дѣло въ томъ, чтобы доказать справедливость теоремы для всякаго **простого** показателя. Для суммы кубовъ теорема доказана была еще древними арабами. Для $n = 4$ ее доказалъ Эйлеръ. Для $n = 5$—доказали Гауссъ и Дирихле. Для $n = 7$—доказалъ Ламе. Наконецъ Куммеръ доказалъ ее для всякаго показателя, меньшаго 100.

Такимъ образомъ, для многихъ **частныхъ случаевъ** теорема Ферма доказана. Но у Ферма было **общее** доказательство ея, для всякаго n, и это-то общее доказательство требуется найти. При этомъ достойно быть отмѣчено, что многіе позднѣйшіе математики (Эйлеръ, Куммеръ), доказывая частные случаи Ферматовой теоремы, пользуются такими пріемами, которые далеко выходятъ за предѣлы элементарной математики и **которые самому Ферма не могли быть извѣстны.** Очевидно, геніальный

французскій математикъ шелъ какимъ-то совершенно особымъ путемъ, ускользнувшимъ изъ поля зрѣнія позднѣйшихъ математиковъ.

Прежде чѣмъ кончить эту главу, считаемъ не лишнимъ сказать нѣсколько словъ по поводу слуховъ о томъ, будто «великое предложеніе Ферма» доказано недавно русскимъ реалистомъ. Въ ноябрѣ 1908-го года русскія газеты облетѣло телеграфное извѣстіе, что «юному бѣлостокскому реалисту Ч. посчастливилось доказать такъ наз. великое предложеніе Ферма» [1]). Газеты прибавляли даже, что доказательство это одобрено спеціальной конференціей Петербургской Академіи Наукъ. Опроверженій со стороны Академіи Наукъ не послѣдовало, и такъ какъ слухъ затѣмъ заглохъ, то у широкихъ круговъ общества такъ и осталось убѣжденіе, что наслѣдство Вольфскеля перешло къ бѣлостокскому реалисту.

Ученый лѣсоводъ Я. И. Перельманъ любезно сообщилъ намъ по этому поводы свѣдѣнія изъ первыхъ рукъ. Вскорѣ послѣ опубликованія въ иностранной печати завѣщанія Вольфскеля—осенью 1907 года—г. Перельманъ помѣстилъ небольшую статью о Ферматовой теоремѣ и стотысячной преміи въ журналѣ «Природа и Люди». Наружная простота самой теоремы и перспектива полученія цѣлаго капитала сдѣлали то, что теорема сразу же стала извѣстна въ большой публикѣ, и многіе тысячи любителей засѣли за отысканіе неуловимаго доказательства. Въ редакцію журнала полетѣли запросы объ адресѣ того нѣмецкаго научнаго общества, которое присуждаетъ преміи (**Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften**). Сотни людей утверждали, что они уже нашли требуемое доказательство и боятся лишь, какъ бы другіе ихъ не упредили и не перехватили причитающіяся имъ сто тысячъ марокъ.

И вотъ, въ разгаръ всей этой «математической лихорадки» появляется въ газетахъ слухъ объ упомянутомъ выше бѣлостокскомъ реалистѣ Ч. и объ одобреніи его доказательства Академіей Наукъ. Редакція названнаго журнала наводитъ справку въ Академіи Наукъ и получаетъ отвѣтъ, что «сообщеніе о г. Ч. предста-

---

[1]) «Русское Слово» 25. XI. 1908.

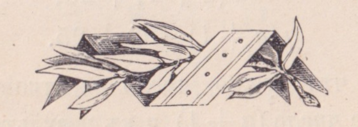
вляется явнымъ недоразумѣніемъ». Дѣло обстояло такъ. Г. Ч. изъ Бѣлостока, дѣйствительно, послалъ въ Академію Наукъ свое «доказательство» Ферматовой теоремы и, дѣйствительно, получилъ отъ непремѣннаго секретаря Академіи отвѣтъ, который юный математикъ принялъ, по наивности, за одобреніе его доказательства. Вотъ текстъ этого отвѣта:

«Имѣю честь, по порученію Конференціи Императорской Академіи Наукъ, сообщить Вамъ, что присланное Вами рукописное доказательство теоремы Фермата передано въ I Отдѣленіе Библіотеки Академіи.

«Пересылка сего доказательства въ Геттингенъ не представляется возможною, ибо на премію, о которой Вы упоминаете, работы не могутъ быть представляемы авторами, а отмѣчаются самою Комиссіею, присуждающею премію. Примите и проч.».

Не зная, что Академія по уставу обязана хранить въ своей библіотекѣ всякую поступившую въ нее книгу или рукопись, молодой математикъ и окружающіе его поняли бумагу, вѣроятно, въ томъ смыслѣ, что Академія, очевидно, одобрила доказательство, разъ она постановила хранить его въ библіотекѣ (Между тѣмъ, Академія даже не разсматривала его по существу). Отсюда и пошелъ упомянутый сенсаціонный слухъ.

Думаемъ, что еще не мало лѣтъ пройдетъ, прежде чѣмъ придется тронуть капиталъ, завѣщанный нѣмецкимъ математикомъ, а впрочемъ,—кто знаетъ!.. Во всякомъ случаѣ читатель не потеряетъ времени даромъ, въ смыслѣ расширенія своихъ математическихъ познаній и навыковъ, если внимательно займется знаменитой задачей Ферма.



Изъ области изученія чиселъ.

Задача 50-я.

Быстрое возвышеніе въ квадратъ.

Существуетъ очень простой пріемъ для устнаго быстраго возвышенія въ квадратъ двухзначныхъ чиселъ, окончивающихся на 5:

Нужно цифры десятковъ умножить на ближайшее высшее число и къ произведенію приписать 25.

Такъ, напр., $35^2 = 1225$, т. е. 25 приписано къ произведенію 3×4; $85^2 = 7225$, т. е. 25 приписано къ произведенію 8×9, и т. п.

Доказательство.

Нетрудно объяснить, на чемъ основанъ этотъ пріемъ. Всякое число, оканчивающееся на 5, можно выразить черезъ $10a + 5$, гдѣ a - число десятковъ. Квадратъ этого числа выразится черезъ

$$(10a + 5)^2 = 100a^2 + 2 \cdot 5 \cdot 10a + 25 = 100a^2 + 100a + 25.$$

Вынеся $100a$ за скобки, имѣемъ

$$100a\,(a + 1) + 25,$$

или

$$a\,(a + 1) \cdot 100 + 25.$$

Отсюда ясно, что нужно число десятковъ a умножить на ближайшее высшее число $(a + 1)$, и къ результату *приписать* 25.

Тѣмъ же пріемомъ можно пользоваться и не для однихъ двухзначныхъ чиселъ,— но, конечно, въ этомъ случаѣ не всегда легко производить нужное перемноженіе въ умѣ. Но и при умноженіи на бумагѣ пользованіе этимъ пріемомъ создаетъ эко-

номію во времени. Такъ $105^2 = 11025$ (т. е. 25 приписано къ произведенію 10×11).

$$125^2 = 15625;$$
$$335^2 = 112225 \text{ и т. п.}$$

Особенные случаи умноженія.

Нѣкоторыя особенности чиселъ находятся въ прямой зависимости отъ принятой нами десятичной системы ихъ обозначенія. Онѣ легко запоминаются, интересны и могутъ пригодиться для практическихъ и теоретическихъ приложеній. Къ числу важнѣйшихъ изъ нихъ относится сумма цифръ всѣхъ чиселъ, получаемыхъ въ таблицѣ уноженія на 9.

$$9 \times 1 = 9$$
$$9 \times 2 = 18;\ 1 + 8 = 9$$
$$9 \times 3 = 27;\ 2 + 7 = 9$$
$$9 \times 4 = 36;\ 3 + 6 = 9$$
$$9 \times 5 = 45;\ 4 + 5 = 9$$
. . . .
$$9 \times 9 = 81;\ 8 + 1 = 9$$
$$9 \times 10 = 90;\ 9 + 0 = 9$$
$$9 \times 11 = 99;\ 9 + 9 = 18;\ 1 + 8 = 9$$
$$9 \times 12 = 108;\ 1 + 0 + 8 = 9$$
$$9 + 13 = 117;\ 1 + 1 + 7 = 9$$

и т. д.

Вотъ нѣсколько интересныхъ образчиковъ умноженій, которые легко удерживаются въ памяти, благодаря своему внѣшнему виду.

$$1 \times 9 + 2 = 11$$
$$12 \times 9 + 3 = 111$$
$$123 \times 9 + 4 = 1\,111$$
$$1\,234 \times 9 + 5 = 11\,111$$
$$12\,345 \times 9 + 6 = 111\,111$$
$$123\,456 \times 9 + 7 = 1\,111\,111$$
$$1\,234\,567 \times 9 + 8 = 11\,111\,111$$
$$12\,345\,678 \times 9 + 9 = 111\,111\,111$$

$9 \times 9 + 7 = 88$
$98 \times 9 + 6 = 888$
$987 \times 9 + 5 = 8\,888$
$9\,876 \times 9 + 4 = 88\,888$
$98\,765 \times 9 + 3 = 888\,888$
$987\,654 \times 9 + 2 = 8\,888\,888$
$9\,876\,543 \times 9 + 1 = 88\,888\,888$
$98\,765\,432 \times 9 + 0 = 888\,888\,888$

$1 \times 8 + 1 = 9$
$12 \times 8 + 2 = 98$
$123 \times 8 + 3 = 987$
$1\,234 \times 8 + 4 = 9\,876$
$12\,345 \times 8 + 5 = 98\,765$
$123\,456 \times 8 + 6 = 987\,654$
$1\,234\,567 \times 8 + 7 = 9\,876\,543$
$12\,345\,678 \times 8 + 8 = 98\,765\,432$
$123\,456\,789 \times 8 + 9 = 987\,654\,321$

Число, состоящее изъ всѣхъ значащихъ цифръ кромѣ 8, написанныхъ въ послѣдовательномъ порядкѣ, при умноженіи на 8, а также на 9 и на числа кратныя 9 (18, 27, 36 и т.), даетъ нижеслѣдующіе интересные и легко запоминаемые результаты:

$12\,345\,679 \times 8 = 98\,765\,432$
$12\,345\,679 \times 9 = 111\,111\,111$
$12\,345\,679 \times 18 = 222\,222\,222$
$12\,345\,679 \times 27 = 333\,333\,333$
$12\,345\,679 \times 36 = 444\,444\,444$
$12\,345\,679 \times 45 = 555\,555\,555$
$12\,345\,679 \times 54 = 666\,666\,666$
$12\,345\,679 \times 63 = 777\,777\,777$
$12\,345\,679 \times 72 = 888\,888\,888$
$12\,345\,679 \times 81 = 999\,999\,999$

Девять.

Интересныя свойства числа 9 часто примѣняются въ ариѳметикѣ какъ для теоретическихъ изысканій и практическихъ дѣйствій, такъ и для составленія различныхъ занимательныхъ задачъ, или такъ называемыхъ «головоломокъ». Въ отдѣлѣ угадыванье чиселъ» въ первой книгѣ «Смекалки» мы уже широко пользовались девяткой. Распространено также практическое примѣненіе девятки для повѣрки умноженія и дѣленія. Основано оно на томъ свойствѣ всякаго числа, что остатокъ, получаемый отъ дѣленія числа на девять, всегда равенъ остатку отъ дѣленія на 9 суммы цифръ этого числа. Укажемъ здѣсь еще нѣсколько интересныхъ примѣненій этого числа.

Прежде всего нетрудно убѣдиться, что если мы напишемъ произвольное двузначное число, а затѣмъ напишемъ цифры этого же числа въ обратномъ порядкѣ и возьмемъ разность полученныхъ чиселъ, то эта разность всегда раздѣлится на 9.

Наприм. $72 - 27 = 45$; $92 - 29 = 63$, $63 - 36 = 27$ и т. д. Вообще ясно, что $(10a + b) - (10b + a) = 9(a - b)$, т. е. получается число, дѣлящееся на 9 (Кромѣ того разность эта равна произведенію 9 на разность цифръ даннаго двузначнаго числа).

Знаніе этой особенности можетъ принести практическую пользу, напр., многимъ бухгалтерамъ. Въ двойной бухгалтеріи случаются иногда ошибки, происходящія отъ перестановки цифръ, въ числахъ. Такъ, напр., бухгалтеръ можетъ вписать въ сторону, скажемъ, «дебета»: 4 р. 38 к., а въ «кредитѣ» по ошибкѣ поставить 4 р. 83 к., т. е. число, состоящее изъ тѣхъ же цифръ но двѣ изъ нихъ переставлены. Если другихъ ошибокъ нѣтъ, то при подведеніи баланса между дебетомъ и кредитомъ всегда будетъ выходить такая разница, которая дѣлится на 9. Обративъ на это вниманіе, бухгалтеръ тотчасъ долженъ справиться, не перепутаны ли гдѣ цифры.

Задача 51-я.

Попросите кого-либо написать какое угодное число изъ трехъ цифръ, но только такое, чтобы крайнія цифры были различны. Пусть потомъ онъ возьметъ это число наоборотъ, т. е. переставить въ немъ крайнія цифры, и вычтетъ одно число изъ другого. Полученная разность всегда дѣлится на 9, и вы можете всегда сказать впередъ, каково будетъ частное.

Рѣшеніе.

Напримѣръ, если взято сначала число 845, то $845-548=$ $=297$; $297:9=33$, т. е. *разницѣ между первой и послѣдней цифрой взятаго числа, умноженной на 11.*

Чтобы доказать это правило для всякаго трехзначнаго числа, въ которомъ первая и послѣдняя цифра различны, обозначимъ черезъ a, b и c соотвѣтственно цифры сотенъ, десятковъ и единицъ числа. Тогда взятое число есть

$$100a+10b+c,$$

а написанное наоборотъ:

$$100c+10b+a.$$

Вычитая одно изъ другого и дѣля на 9, имѣемъ:

$$\frac{100a+10b+c-(100c+10b+a)}{9}=\frac{99(a-c)}{9}=11(a-c).$$

Итакъ, какое бы трехзначное число ни написалъ кто-либо, вы, взявъ разность между крайними цифрами и помноживъ ее на 11, тотчасъ говорите частное, которое получится отъ дѣленія на 9 разности между взятымъ числомъ и тѣмъ же числомъ, написаннымъ наоборотъ.

Предыдущую задачу можно предложить въ еще болѣе занимательномъ, въ особенности для дѣтей, варіантѣ.

Напишите на бумажкѣ число 1089, вложите бумажку въ конвертъ и запечатайте его. Затѣмъ скажите комулибо, давъ ему этотъ конвертъ, написать на немъ въ рядъ три любыя цифры, но такія, чтобы крайнія изъ нихъ были различны и разнились бы между собою болѣе, чѣмъ на единицу. Пусть затѣмъ это число онъ напишетъ наоборотъ и вычтетъ изъ большаго меньшее. Получится нѣкоторое число. Пусть подъ этимъ числомъ онъ подпишетъ его же, но наоборотъ, т. е. переставивъ крайнія цифры, и сложитъ оба числа. Когда онъ получитъ сумму, предложите ему вскрыть конвертъ. Тамъ онъ найдетъ бумажку съ числомъ 1089, которое, къ его удивленію, и есть точь-въ-точь полученное имъ число.

Напримѣръ: Пусть онъ напишетъ 713; взявъ наоборотъ, получаемъ 317; $713 - 317 = 396$; $396 + 693 = 1089$. Тотъ же результатъ получится, какъ легко видѣть, и для всякаго такого трехзначнаго числа, въ которомъ первая и послѣдняя цифры различны, и разность этихъ цифръ больше единицы.

Болѣе распространены слѣдующія три «головоломки» съ числомъ 9. Всѣ онѣ основаны на томъ, что остатокъ, получаемый при дѣленіи числа на 9, всегда равенъ остатку, получаемому отъ дѣленія на 9 суммы цифръ этого числа.

Задача 52-я.

Возьмите, не говоря мнѣ ничего, любое двузначное число, переставьте въ немъ цифры и вычтите большее число изъ меньшаго. Скажите теперь только одну цифру полученной разности, и я скажу вамъ тотчасъ другую.

Рѣшеніе.

Если кто скажетъ вамъ любую одну цифру, то другая будетъ дополнительная сказанной до 9-ти. Такъ что, если ктолибо скажетъ вамъ послѣ того, какъ вычтетъ одно число изъ

другого, что одна цифра разности 6, то вы тотчасъ ему говорите, что другая есть 3 и т. д. Доказательство этого настолько легко, что читатель справится съ нимъ безъ затрудненій.

Задача 53-я.

Возьмите, не говоря ничего мнѣ, число изъ трехъ или болѣе цифръ, раздѣлите его на 9 и скажите мнѣ только остатокъ, который получится отъ такого дѣленія. Зачеркните теперь во взятомъ вами числѣ какую-либо цифру (но не нуль) и опять скажите мнѣ остатокъ отъ дѣленія на 9 числа, полученнаго послѣ зачеркиванія цифры, и я тотчасъ назову зачеркнутую вами цифру.

Рѣшеніе.

Изъ перваго остатка надо вычесть второй остатокъ, если же онъ больше, то къ первому остатку надо прибавить девять, и изъ полученной суммы вычесть 2-й остатокъ, тогда всегда и получится зачеркнутая цифра. Читатель легко можетъ доказать это самъ.

Задача 54-я.

Напишите число съ пропущенной цифрой, и я тотчасъ вставлю туда такую цифру, что число точно раздѣлится на 9.

Рѣшеніе.

Пусть, напримѣръ, кто либо напишетъ съ пропускомъ рядъ цифръ 728 57. Тогда, отбрасывая отъ суммы цифръ всѣ девятки, какія возможно, получаемъ въ остаткѣ 2, но $9-2=7$. Значитъ на пустое мѣсто надо поставить цифру 7. Доказательство очевидно.

Задачу эту, какъ и предыдущія, можно всячески разнообразить.

Нѣкоторые числовые курьезы.

Въ главѣ о нѣкоторыхъ особенныхъ случаяхъ умноженія мы уже показали, что легко получить и запомнить результаты нѣкоторыхъ перемноженій. Очень легко также запомнить квадраты такихъ чиселъ, какъ 11, 111, 1 111 и т. д. А именно:

$$11^2 = 121;\ 111^2 = 12\,321;\ 1\,111^2 = 1\,234\,321;\ \text{и т. д.}$$

Нетрудно убѣдиться, что эти полученныя отъ возвышенія въ квадратъ числа: 121, 12 321, 1 234 321, 123 454 321 и т. д. въ въ свою очередь отличаются любопытными свойствами. Такъ, разсматривая сумму ихъ цифръ, замѣчаемъ прежде всего, что

$$1+2+1 = 4 = 2^2$$
$$1+2+3+2+1 = 9 = 3^2$$
$$1+2+3+4+3+2+1 = 16 = 4^2$$
$$1+2+3+4+5+4+3+2+1 = 25 = 5^2$$

и т. д. (Ср. задачу о пиѳагорейскомъ кругѣ, стр. 31).

Кромѣ того каждое изъ этихъ чиселъ можно представить въ видѣ нижеслѣдующихъ интересныхъ по формѣ неправильныхъ дробей:

$$121 = \frac{22 \times 22}{1+2+1};\quad 12\,321 = \frac{333 \times 333}{1+2+3+2+1};$$

$$1\,234\,321 = \frac{4\,444 \times 4\,444}{1+2+3+4+3+2+1};$$

$$123\,454\,321 = \frac{55\,555 \times 55\,555}{1+2+3+4+5+4+3+2+1}$$

и т. д.

О числахъ 37 и 41.

Число 37 обладаетъ многими любопытными свойствами. Такъ, умноженное на 3 и на числа кратныя 3 (до 27 включительно), оно даетъ произведенія, изображаемыя одной какой-либо цифрой:

$37 \times 3 = 111$; $37 \times 6 = 222$; $37 \times 9 = 333$; $37 \times 12 = 444$; $37 \times 15 = 555$; $37 \times 18 = 666$; $37 \times 21 = 777$; $37 \times 24 = 888$; $37 \times 27 = 999$.

Произведеніе отъ умноженія 37 на сумму его цифръ равняется суммѣ кубовъ тѣхъ же цифръ, т. е.:

$$37 \times (3 + 7) = 3^3 + 7^3 = 370.$$

Если въ числѣ 37 взять сумму квадратовъ его цифръ и вычесть изъ этой суммы произведеніе тѣхъ же цифръ, то опять получимъ 37:

$$(3^2 + 7^2) - 3 \cdot 7 = 37.$$

Но едва ли не самымъ интереснымъ свойствомъ числа 37 является то, что нѣкоторыя кратныя ему числа при круговой перестановкѣ входящихъ въ нихъ цифръ даютъ опять-таки числа кратныя 37. Наприм.:

$$259 = 7 \times 37$$
$$592 = 16 \times 37$$
$$925 = 25 \times 37.$$

То же самое вѣрно относительно чиселъ 185, 518, 851 и чиселъ 296, 629, 962. Всѣ эти числа состоятъ изъ тѣхъ же цифръ, только переставляемыхъ въ круговомъ порядкѣ, и всѣ они кратны 37.

Подобнымъ же свойствомъ отличаются и нѣкоторыя числа кратныя 41. Такъ, числа:

17 589; 75 891; 58 917; 89 175 и 91 758,

какъ легко провѣрить, всѣ кратны 41 и каждое получается изъ предыдущаго путемъ только одной круговой перестановки входящихъ въ число цифръ.

Числа 1375, 1376 и 1377.

Написанныя выше три *послѣдовательныхъ* числа, *кажется*, суть наименьшія изъ такихъ, что каждое дѣлится на кубъ нѣкотораго числа, отличнаго отъ единицы: 1 375 дѣлится на 5^3 1 376—на 2^3 и 1 377—на 3^3.

Степени чиселъ, состоящія изъ однѣхъ и тѣхъ же цифръ.

Вотъ нѣсколько послѣдовательныхъ чиселъ, *квадраты* которыхъ пишутся тѣми же цифрами, но только въ измѣненномъ порядкѣ:

$13^2 = 169$; $157^2 = 24\ 649$; $913^2 = 833\ 569$.
$14^2 = 196$; $158^2 = 24\ 964$; $914^2 = 835\ 396$.

Изъ однихъ и тѣхъ же цифръ, написанныхъ въ разномъ порядкѣ, состоятъ *кубы* слѣдующихъ чиселъ:

$345^3 = 41\ 063\ 625$; $331^3 = 36\ 264\ 691$;
$384^3 = 56\ 623\ 104$; $406^3 = 66\ 923\ 416$.
$405^3 = 66\ 430\ 125$;

Слѣдующая пара чиселъ представляетъ ту особенность, что и квадраты ихъ квадратовъ также состоятъ изъ однѣхъ и тѣхъ же цифръ, только написанныхъ въ иномъ порядкѣ:

$32^2 = 1\ 024$ $32^4 = 1\ 048\ 576$
$49^2 = 2\ 401$ $49^4 = 5\ 764\ 801$.

Квадраты чиселъ, не содержащіе однѣхъ и тѣхъ же цифръ.

1°.—Квадраты чиселъ, состоящіе изъ девяти различныхъ цифръ:

$11\ 826^2 = 139\ 854\ 276$	$23\ 439^2 = 549\ 386\ 721$
$12\ 363^2 = 152\ 843\ 769$	$24\ 237^2 = 587\ 432\ 169$
$12\ 543^2 = 157\ 326\ 849$	$24\ 276^2 = 589\ 324\ 176$
$14\ 676^2 = 215\ 384\ 976$	$24\ 441^2 = 597\ 362\ 481$
$15\ 681^2 = 245\ 893\ 761$	$24\ 807^2 = 615\ 387\ 249$
$15\ 963^2 = 254\ 817\ 369$	$25\ 059^2 = 627\ 953\ 481$
$18\ 072^2 = 326\ 597\ 184$	$25\ 572^2 = 653\ 927\ 184$
$19\ 023^2 = 361\ 874\ 529$	$25\ 941^2 = 672\ 935\ 481$
$19\ 377^2 = 375\ 468\ 129$	$26\ 409^2 = 697\ 435\ 281$
$19\ 569^2 = 382\ 945\ 761$	$26\ 733^2 = 714\ 653\ 289$
$19\ 629^2 = 385\ 297\ 641$	$27\ 129^2 = 735\ 982\ 641$
$20\ 316^2 = 412\ 739\ 856$	$27\ 273^2 = 743\ 816\ 529$
$22\ 887^2 = 523\ 814\ 769$	$29\ 034^2 = 842\ 973\ 156$
$23\ 019^2 = 529\ 874\ 361$	$29\ 106^2 = 847\ 159\ 236$
$23\ 178^2 = 537\ 219\ 684$	$30\ 384^2 = 923\ 187\ 456$

2°.—Квадраты чиселъ, состоящіе изъ десяти разныхъ цифръ:

$32\,043^2 = 1\,026\,753\,849$	$45\,624^2 = 2\,081\,549\,376$
$32\,286^2 = 1\,042\,385\,796$	$55\,446^2 = 3\,074\,258\,916$
$33\,144^2 = 1\,098\,524\,736$	$68\,763^2 = 4\,728\,350\,169$
$35\,172^2 = 1\,237\,069\,584$	$83\,919^2 = 7\,042\,398\,561$
$39\,147^2 = 1\,532\,487\,609$	$99\,066^2 = 9\,814\,072\,356$

Все разныя цифры.

Если число 123 456 789 умножить на всякое цѣлое число меньшее, чѣмъ 9, и первое съ нимъ, т. е. на числа 2, 4, 5, 7, 8, то каждое полученное произведеніе будетъ состоять изъ 9-ти *различныхъ* цифръ.

Въ слѣдующемъ вычитаніи:

$$\begin{array}{r} 987\,654\,321 \\ -\;123\,456\,789 \\ \hline 864\,197\,532 \end{array}$$

уменьшаемое, вычитаемое и разность — каждое состоитъ изъ девяти различныхъ цифръ.

Числа, отличающіяся отъ своихъ логариѳмовъ только мѣстомъ запятой, опредѣляющей десятичные знаки.

Изслѣдованіями объ отысканіи подобнаго рода чиселъ занимались въ особенности знаменитый Эйлеръ и англійскій профессоръ Тэтъ. Ниже мы даемъ только три примѣра подобныхъ чиселъ, обращая вниманіе на то, что рядъ ихъ можетъ быть продолженъ неопредѣленно далеко.

$$\log 1{,}3\,712\,885\,742 = 0{,}13\,712\,885\,742$$
$$\log 237{,}5\,812\,087\,593 = 2{,}375\,812\,087\,593$$
$$\log 3\,550{,}2\,601\,815\,865 = 3{,}5\,502\,601\,815\,865$$

Круговыя числа.

Число 142 857 отличается многими замѣчательными свойствами. Если его умножать на послѣдовательныя числа 2, 3, 4, 5 и 6, то полученныя произведенія будутъ состоять изъ тѣхъ же цифръ, что̀ и само число, только переставленныхъ въ круговомъ порядкѣ. Другими словами: всѣ эти произведенія можно получить изъ представленнаго здѣсь круга, читая всѣ числа подъ-рядъ, въ направленіи движенія часовой стрѣлки, но каждый разъ начиная съ другой цифры:

Фиг. 81.

2 × 142 857	=	285 714	
3 ×	»	=	428 571
4 ×	»	=	571 428
5 ×	»	=	714 285
6 ×	»	=	857 142
7 ×	»	=	999 999
8 ×	»	=	1 142 856.

При умноженіи числа на 7 получается, какъ видимъ, шесть девятокъ, при умноженіи же на 8 получается уже семизначное число 1 142 856. Это послѣднее замѣчательно тѣмъ, что, приложивъ его первую цифру (1) къ послѣдней (6), получимъ опять данное число 142 857. Вслѣдъ за этимъ умноженія на дальнѣйшія числа даютъ тотъ же результатъ, т. е. мы получаемъ опять числа, написанныя цифрами 1, 4, 2, 8, 5, 7 и въ указанномъ круговомъ порядкѣ, *если въ получаемыхъ семизначныхъ числахъ будемъ первую цифру переносить назадъ и прибавлять къ послѣдней.* Въ самомъ дѣлѣ:

9 × 142 857	=	1 285 713	(285 714)
10 × »	=	1 428 570	(428 571)
11 × »	=	1 571 427	(571 428)
23 × »	=	3 285 711	(285 714)
89 × »	=	12 714 273.	

Здѣсь опять слѣдуетъ отмѣтить, что, умножая на 89, мы получаемъ уже 8-ми значное число, но если въ немъ двѣ первыя цифры (12) придать къ двумъ послѣднимъ (73), то опять получимъ число, состоящее изъ тѣхъ же цифръ, что и взятое начальное, но написанное въ иномъ порядкѣ, а именно: 714 285. Точно также:

356 × 142 857 = 50 857 092 (получаемъ число 857 142, если приложимъ 50 къ 092)

Что же за *«особенное»* такое число 142 857, и въ чемъ секретъ его *особенности?*

Ключъ къ уразумѣнію всѣхъ особенностей этого числа даетъ то именно, якобы, «исключеніе», которое нарушаетъ приведенный выше круговой порядокъ, а именно, произведеніе 7 × 142 857 = = 999 999.

Число 142 857 есть, какъ оказывается, *періодъ* дроби $\frac{1}{7}$, если ее представить въ видѣ десятичной дроби.

Совершено тѣми же свойствами будетъ отличаться всякій другой «полный» или «совершенный періодъ», т. е. періодъ, получаемый отъ обращенія въ десятичную простой дроби вида $\frac{1}{p}$ (гдѣ p есть первоначальное число), и при томъ такой періодъ, что число его цифръ ровно на единицу меньше, чѣмъ показываетъ число знаменателя данной простой дроби.

Такимъ образомъ свойствами числа 142 857 будетъ обладать $\frac{1}{17}$ = 0, (0 588 235 294 117 647). Въ самомъ дѣлѣ:

2 × 0 588 235...... = 1 176 470 588 235 294

т. е. получаемъ число, написанное тѣми же цифрами, но въ иномъ круговомъ порядкѣ. И точно также:

7 × 0 588 235...... = 4 117 647 058 823 529

Въ то время, какъ

17 × 0 588 235..... . = 9 999 999 999 999 999.

Точно такими же свойствами будетъ отличаться періодъ дроби $\frac{1}{29} = 0,(0\,344\,827\,586\,206\,896\,551\,724\,137\,931)$, въ которомъ 28 цифръ.

Нетрудно доказать, что каждая обыкновенная дробь вида $\frac{1}{p}$, гдѣ p есть первоначальное число, при обращеніи въ десятичную дастъ періодъ, въ которомъ должно быть меньше, чѣмъ p, десятичныхъ знаковъ.

Въ самомъ дѣлѣ, при дѣленіи остатокъ всегда долженъ быть меньше дѣлителя. Отсюда слѣдуетъ, что въ остаткахъ при дѣленіи 1 на p для обращенія въ десятичную дробь можетъ получиться только $p-1$ различныхъ чиселъ, а затѣмъ процессъ начнетъ опять повторяться.

Такъ, напр., для извѣстной уже намъ дроби $\frac{1}{7}$ имѣемъ:

$$\frac{1}{7} = 0{,}1\,\frac{3}{7} = 0{,}14\,\frac{2}{7} = 0{,}142\,\frac{6}{7} = 0{,}1428\,\frac{4}{7} = 0{,}14285\,\frac{5}{7} =$$

$= 0{,}142857\,\frac{1}{7} = \ldots$ (дальше, очевидно, начнется повтореніе тѣхъ же цифръ).

Отсюда ясно, что если мы будемъ помножать число 142 857 на 3, 2, 6, 4, 5, то мы будемъ получать періодъ, начинающійся соотвѣтственно *послѣ* 1-й, 2-й, 3-й, 4-й и 5-й цифры.

Отмѣтимъ еще слѣдующія положенія:

Если періодъ, получающійся отъ обращенія дроби вида $\frac{1}{p}$ (гдѣ p есть простое число) въ десятичную, содержитъ $\frac{p-1}{2}$ цифръ, то при умноженіи этого періода на всѣ множители отъ 1 до $p-1$ всегда будемъ получать числа изъ $\frac{p-1}{2}$ цифръ, при чемъ всѣ эти числа можно разбить на два ряда такихъ, что каждое число каждаго ряда можетъ получаться изъ предыдущаго путемъ только круговой перестановки цифръ.

Для примѣра будемъ обращать въ десятичную дробь $\frac{1}{13}$. Получается $\frac{1}{13}=0,(076923)$. Помножая число періода на множители 1, 2, 3, . . . 11, 12, находимъ:

$1\times 076\,923$	$=076\,923$	$2\times 076\,923$	$=153\,846$
$3\times$ »	$=230\,769$	$5\times$ »	$=384\,615$
$4\times$ »	$=307\,692$	$6\times$ »	$=461\,538$
$9\times$ »	$=692\,307$	$7\times$ »	$=538\,461$
$10\times$ »	$=769\,230$	$8\times$ »	$=615\,384$
$12\times$ »	$=923\,076$	$11\times$ »	$=846\,153$

Возьмемъ снова уже извѣстное намъ число, представляющее періодъ дроби $\frac{1}{7}$, т. е. число 142 857. Помимо извѣстныхъ уже намъ свойствъ оно обладаетъ и такимъ: разобьемъ его на двѣ половины по три цифры въ каждой и сложимъ эти части, найдемъ число, кратное 9-ти, т. е.

$$142+857=999.$$

Подобнымъ же свойствомъ отличается число, представляющее періодъ $\frac{1}{17}$ (см. выше) и т. п. То же относится и къ числамъ, полученнымъ нами выше изъ періода $\frac{1}{13}$.

Тѣмъ не менѣе, если мы найдемъ такой періодъ дроби $\frac{1}{p}$, который содержитъ $\frac{p-1}{2}$ цифръ, и это послѣднее число $\frac{p-1}{2}$ будетъ само вида $4n+3$, то такой періодъ нельзя, слѣдовательно, раздѣлить на 2 равныя половины, гдѣ каждая цифра дополнила бы соотвѣтствующую до 9. Но въ такомъ случаѣ число $\frac{p-1}{p}$ (дополняющее $\frac{1}{p}$ до единицы) дастъ періодъ тоже изъ $\frac{p-1}{2}$ цифръ, дополнительный періоду $\frac{1}{p}$.

Напримѣръ:

$$\frac{1}{31} = 0,(032\,258\,064\,516\,129)$$

$$\frac{30}{31} = 0,(967\,741\,935\,483\,870)$$

$$\text{Сумма} = 0,(999\,999\,999\,999\,999)$$

Полезное примѣненіе.

Изъ указанныхъ выше особенностей извѣстнаго рода чиселъ можно извлечь нѣкоторыя полезныя практическія примѣненія. И прежде всего можно ввести значительныя упрощенія и сокращенія въ вычисленія, когда мы обращаемъ $\frac{1}{p}$ (p = первоначальному числу) въ десятичную дробь.

Въ такомъ случаѣ, нашедши нѣкоторое число десятичныхъ знаковъ, мы еще болѣе значительную часть ихъ можемъ найти, умножая полученную уже часть частнаго на остатокъ. Для удобства вычисленія процессъ дѣленія слѣдуетъ продолжать до тѣхъ поръ, пока остатокъ получится сравнительно небольшой.

Будемъ, наприм., обращать въ десятичную дробь $\frac{1}{97}$. Начавъ дѣленіе числителя на знаменатель, мы, положимъ, получимъ въ частномъ 0,01 030 927 835 и въ остаткѣ 5. Остатокъ невеликъ, и мы разсуждаемъ такъ: начиная съ послѣдней полученной цифры частнаго, дальнѣйшія цифры должны быть такія, какія получатся отъ обращенія въ десятичную дроби $\frac{1}{97}$, умноженной на 5. Итакъ, умножая на 5 полученныя цифры частнаго (или прибавляя нуль справа и дѣля на 2), мы сразу получаемъ еще 11 цифръ частнаго.

Задача 55-я.

Мгновенное умноженіе.

Если вы въ достаточной степени внимательно отнеслись къ предыдущей главѣ и усвоили свойства повторяемости однихъ и тѣхъ же цифръ, которыми обладаютъ нѣкоторыя числа, то это

доставитъ вамъ возможность производить надъ числами извѣстныя дѣйствія, которыя для непосвященнаго покажутся прямо поразительными. Такъ, напр., вы можете кому-либо предложить слѣдующее:

Я пишу множимое, а вы подписываете подъ нимъ какой хотите множитель изъ двухъ или трехъ цифръ, и я тотчасъ же напишу вамъ произведеніе этихъ чиселъ, начиная отъ лѣвой руки къ правой.

Рѣшеніе.

Въ самомъ дѣлѣ, вы напишете, какъ множимое, періодъ дроби $\frac{1}{7}$, т. е. число 142 857, о которомъ мы говорили въ предыдущей главѣ. Предположимъ, что другой потребуетъ, чтобы вы это число умножили, напр., на 493.

Дѣло, въ сущности, сводится къ тому, что вы это число 493 мысленно умножается на $\frac{1}{7}$, а затѣмъ мысленно же обращаете въ періодическую дробь, что̀ при свойствахъ извѣстнаго вамъ періода (142 857) совсѣмъ не трудно Поэтому, глядя на число 493, вы мысленно дѣлите его на семь и получаете $\frac{493}{7} = 70\frac{3}{7}$. Слѣдовательно, *вы пишете* 70, какъ двѣ первыя цифры искомаго произведенія (пишете слѣва направо).

Теперь остается $\frac{3}{7}\left(\text{т. е. } 3 \times \frac{1}{7}\right)$, иначе говоря, — 3, умноженное на періодъ 142 857, и вся задача заключается только въ томъ, чтобы опредѣлить первую цифру, съ которой надо начинать писать этотъ періодъ въ круговомъ порядкѣ. Разсуждаемъ такъ:

Единицы множимаго, 7, на множитель, 3, даютъ въ произведеніи 21. Значитъ послѣдняя цифра въ искомомъ произведеніи должна быть 1, а слѣдовательно, первой въ періодѣ придется ближайшая слѣдующая, т. е. 4 (или находимъ 4, дѣля 3 на 7). Итакъ, *пишемъ* (послѣ 70) еще цифры 4 285, а отъ 71, которыя

должны бы стоять на концѣ, надо отнять тѣ 70, что написаны въ началѣ (сравните съ умноженіемъ 89 × 142 857 въ предыдущей главѣ). Это дастъ двѣ послѣднія цифры искомаго произведенія: 01. Итакъ, искомое произведеніе есть **70 428 501.**

Все это можно (при усвоеніи сущности задачи) продѣлать весьма быстро. И когда вашъ собесѣдникъ, непосредственнымъ умноженіемъ провѣривъ вѣрность вашего отвѣта, предложитъ опять взятое вами число (142 857) умножить сразу, например, на 825, вы опять разсуждаете точно также:

$$\frac{825}{7} = 117\frac{6}{7}$$ и *пишете* **117**.

Такъ какъ 6 × 7 = 42, то послѣдняя цифра искомаго произведенія будетъ 2; значитъ, круговую послѣдовательность чиселъ періода надо начинать съ непосредственно за 2 слѣдующей цифрой, т. е. съ 8, и вы *пишете* (за 117) **857;** дальше должны итти цифры періода 142, изъ нихъ надо отнять 117, и вы пишете еще три цифры **025.** Получаете:

142 857 × 825 = **117 857 025.**

И слава ваша, какъ «необыкновеннаго счетчика», пожалуй, упрочится!

Вотъ еще примѣръ: 142 857 надо умножить на 378.

$$\frac{378}{7} = 54 = 53\frac{7}{7},$$ *пишемъ* **53**.

7 × на періодъ даетъ 6 девятокъ. Вычитаемъ мысленно 53 изъ 999 999 и результатъ приписываемъ за 53; получаемъ

53 999 946.

Замѣчаніе. При нѣкоторой практикѣ это «умноженіе» дѣлается чрезвычайно быстро и дѣйствительно поражаетъ незнающаго, въ чемъ дѣло. Надо, однако,—если желательно сохранить секретъ и занимательность,—всячески разнообразить это математическое развлеченіе. Можно, напримѣръ, партнеру сказать такъ:

Вотъ я пишу нѣкоторое число; подпишите подъ нимъ какой угодно множитель изъ 2-хъ, или 3-хъ цифръ, умножьте и полученное произведеніе раздѣлите на 13. То частное, которое вы послѣ этого получите, я вамъ напишу сейчасъ же, какъ только вы напишете множитель.

Въ этомъ случаѣ, конечно, вы пишете въ качествѣ множимаго не 142 857, а $13 \times 142\,857 = 1\,857\,141$. Такъ какъ 13 въ данномъ случаѣ, въ сущности, сокращается, то частное вы получите совершенно такъ же, какъ получали произведеніе въ предыдущихъ примѣрахъ. Вмѣсто числа 13 можно взять всякое иное число.

Нѣсколько замѣчаній о числахъ вообще.

Теорема Ферма, за доказательство которой, какъ мы уже говорили въ одной изъ предшествующихъ главъ, можно получить 100 000 марокъ, кромѣ титула «великой»носитъ еще названіе его *посмертной* теоремы. Вопросы подобнаго рода изучаются въ той части математики, которая носитъ общее названіе *теоріи чиселъ*. Въ этой области сравнительно мало кто работаетъ, хотя, по выраженію многихъ, она исполнена «волшебнаго очарованія». «Математика—царица наукъ, но ариѳметика, (т. е. теорія чиселъ) есть царица математики»,— говорилъ «первый изъ математиковъ (princeps mathematicorum)» Гауссъ, а ужъ онъ-то въ этомъ вопросѣ можетъ считаться вполнѣ компетентнымъ судьей. Но, быть можетъ, ни одна изъ областей математическихъ наукъ не требуетъ такой силы и строгости мышленія, остроумія пріемовъ и глубокаго проникновенія въ природу числа, какъ именно эта теорія чиселъ, или «высшая ариѳметика», какъ ее иногда называютъ. Читатель навѣрное не посѣтуетъ на насъ, если мы сдѣлаемъ небольшую историческую экскурсію въ эту область. Начнемъ опять съ упомянутой уже знаменитой *посмертной теоремы Ферма*. Теорема состоитъ въ томъ, что

Невозможно найти цѣлыя числа для x, y, z, которыя удовлетворяли бы уравненію

$$x^n + y^n = z^n,$$

если n есть цѣлое число большее, чѣмъ 2.

Теорема Вильсона состоитъ въ слѣдующемъ:

Если p есть первоначальное число, то число

$$1 + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots\ldots\ldots (p-1)$$

дѣлится безъ остатка на p.

Эта знаменитая теорема была высказана Джономъ Вильсономъ (1741—1793), воспитанникомъ Кэмбриджскаго университета. Какъ и Ферма, онъ не занимался спеціально математикой. Теорему свою онъ предложилъ ученымъ безъ доказательства. Впервые опубликовалъ ее Уорингъ (Waring) въ своихъ «Meditationes Algebraicae», а общее доказательство ея далъ *Лагранжъ* въ 1771 году.

Формулы для нахожденія парвоначальныхъ чиселъ. Общей формулы для полученія ряда послѣдовательныхъ первоначальныхъ чиселъ въ любыхъ предѣлахъ не найдено. Лежандръ предложилъ формулу $2x^2 + 29$, которая даетъ первоначальныя числа для всѣхъ послѣдовательныхъ значеній x отъ $x = 0$ до $x = 28$, т. е. для 29 значеній x. Эйлеръ далъ формулу: $x^2 + x + 41$, которая даетъ первоначальныя числа для значеній x отъ 0 до 39, т. е. для сорока значеній x. Американскій математикъ Эскоттъ (Escott) нашелъ, что если въ формулѣ Эйлера замѣнить x черезъ $x - 40$, то найдемъ формулу $x^2 - 79x + 1601$, которая даетъ первоначальныя числа для 80 послѣдовательныхъ значеній x. Въ изслѣдованіи вопроса о первоначальныхъ числахъ особенно замѣчательны труды русскаго академика Чебышова.

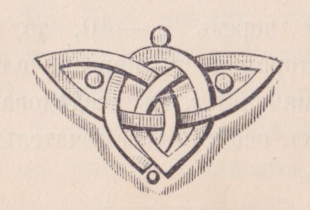
Можетъ ли быть больше одной группы первоначальныхъ множителей числа? Всѣ почти наши учебники ариѳметики на этотъ вопросъ отвѣчаютъ: *нѣтъ*. Число, молъ, разлагается только

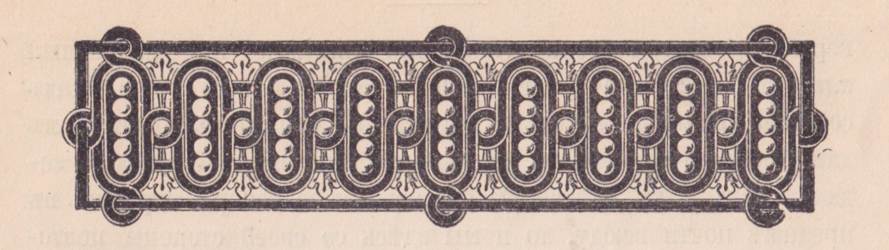
на одну группу первоначальныхъ множителей. И этотъ отвѣтъ совершеннно вѣренъ, пока мы держимся только тѣснаго чисто «ариѳметическаго», такъ сказать, —привычнаго понятія о единицѣ, о числѣ. Но если взглядъ на число мы расширимъ до понятія о *комплексномъ* числѣ (см. далѣе главу «Наглядное изображеніе комплексныхъ чиселъ»), то положеніе, что всякое число можетъ быть разложено на первоначальныхъ производителей только единственнымъ путемъ, лишается математической достовѣрности. Такъ напримѣръ:

$$26 = 2 \times 13 = (5 + \sqrt{-1})\ (5 - \sqrt{-1}).$$

Развитіе понятія о числѣ. Начиная съ ученія о цѣлыхъ числахъ древнихъ грековъ, переходя черезъ раціональныя дроби Діофанта, такъ называемыя «раціональности» и «ирраціональности» разсматриваются, какъ числа, только въ шестнадцатомъ вѣкѣ. Отрицательныя числа, какъ *обратныя* положительнымъ, были выдвинуты Жираромъ и Декартомъ. «Мнимыя» и комплексныя числа ввели въ математическій обиходъ Арганъ, Вессель, Эйлеръ и Гауссъ.

Такимъ образомъ въ послѣднее время создалось новое, совершенно общее понятіе о числѣ, и, говоря кратко, математики приняли за правило, что *оправданіе для введенія въ ариѳметику числа основывается только на опредѣленіи этого числа.* Исходя изъ этой точки зрѣнія, и развивается вся современная теоретическая ариѳметика.





Графики.

Какъ-то проѣздомъ черезъ уѣздный городъ Западнаго края пишущему эти строки случилось разговориться съ мѣстнымъ обывателемъ и узнать, что у нихъ въ городѣ есть своего рода чудо-математикъ. Этотъ математикъ мало того, что рѣшалъ «всякую» и «какую угодно» предложенную ему задачу, но рѣшалъ чрезвычайно быстро, почти не думая, при помощи всего-на-всего обыкновенной *шахматной доски*. Кусочкомъ мѣла онъ извѣстнымъ ему образомъ разставлялъ на клѣткахъ доски числа задачи и затѣмъ, не производя никакихъ письменныхъ вычисленій, говорилъ тотчасъ отвѣтъ.

— И это каждую предложенную задачу онъ рѣшаетъ такимъ образомъ?—заинтересовался я.

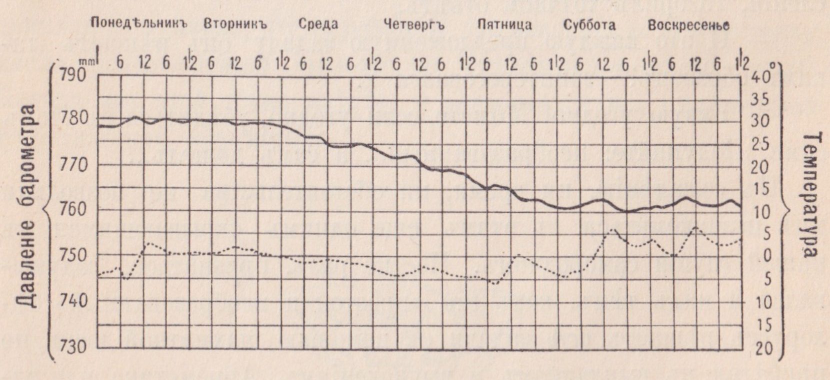
— Какую угодно! Можете, если угодно, убѣдиться въ этомъ сами. Подумайте: необразованный... а самъ дошелъ...

Къ сожалѣнію, ни время, ни обстоятельства не позволили мнѣ познакомиться съ этимъ еще однимъ скрывающимся въ нашей глуши самородкомъ. Но не разъ, признаться, задумывался я надъ тѣмъ, какъ это «простой и необразованный» бѣлоруссъ рѣшаетъ *всѣ* задачи съ помощью шахматной доски, не прибѣгая къ выкладкамъ и вычисленіямъ. Ариѳметика или алгебра безъ вычисленій!.. На первый взглядъ это удивительно, но это только на первый взглядъ.

Быть можетъ, «секретъ» уроженца бѣлорусскаго городка окажется не столь ужъ загадочнымъ, если сообразить, что шахматная доска есть не что иное, какъ площадь, разграфленная

вертикальными и горизонтальными линіями на квадратныя *клѣтки*. Листъ же бумаги, разграфленной на клѣточки, какъ сейчасъ увидимъ, можетъ оказаться незамѣнимымъ подспорьемъ для быстраго рѣшенія весьма многихъ и весьма сложныхъ задачъ. Такъ какъ клѣтчатую бумагу можно теперь встрѣтить въ продажѣ почти всюду, то и мы здѣсь со своей стороны повторяемъ совѣтъ почтеннаго профессора Джона Перри, который въ своей «Практической Математикѣ» говоритъ: «очень важно, чтобы ученикъ извелъ много листовъ бумаги *(клѣтчатой)* на свои упражненія, расточительно пользуясь этимъ матерьяломъ». Добавимъ къ этимъ словамъ почтеннаго ученаго, что «изводить» клѣтчатую бумагу слѣдуетъ и не «ученику» въ точномъ значеніи этого слова, а всякому любителю точныхъ знаній. При помощи такого рода бумаги весьма легко вычерчивать **графики** и примѣнять ихъ къ рѣшенію различныхъ задачъ.

Эти графики въ наше время вы можете найти во многихъ газетахъ и журналахъ. Чаще всего ими пользуются для нагляднаго представленія хода измѣненій температуры и давленія барометра за извѣстный періодъ времени. Примѣръ такого графика данъ на фиг. 81.



Фиг. 81.

На этой фигурѣ изображены даже не одинъ, а два графика: сплошная черная линія изображаетъ колебанія за недѣлю въ показаніяхъ барометра, а линія колебаній температуры обозначена пунктиромъ. Разобраться въ подобномъ графикѣ очень легко.

По горизонтальному направленію означено время: семь дней недѣли и для каждаго дня главнѣйшіе часы наблюденій — 12 часовъ ночи, 6 час. утра, 12 час. дня и 6 час. пополудни. Такъ что сторона каждаго квадратика въ горизонтальномъ направленіи соотвѣтствуетъ промежутку времени въ 6 часовъ, а $\frac{1}{6}$ стороны—1 часу и т. д.

По вертикальному направленію слѣва помѣщены дѣленія въ миллиметрахъ шкалы барометра, а справа—шкалы термометра.

Пусть теперь, скажемъ, каждый часъ въ сутки или черезъ каждые 2, 4, 6 и т. д. часа опредѣляютъ высоту барометра и показаніе термометра. Каждое такое показаніе на клѣткахъ графика легко отмѣтить соотвѣтствующей точкой. Положимъ, напримѣръ, что во вторникъ въ шесть часовъ утра высота барометра была 780 миллиметровъ, а термометръ показывалъ 0°. Тогда на пересѣченіи вертикальной линіи, проходящей черезъ показаніе «Вторникъ 6 час. утра», съ горизонталью, проходящей черезъ дѣленіе барометра 780, мы ставимъ точку, обозначающую показаніе барометра. Точно также на той же вертикали, но въ пересѣченіи ея съ линіей, противъ которой поставлено нулевое показаніе термометра, мы ставимъ точку. Это будетъ показаніе термометра. Соединяя всѣ послѣдовательныя показанія барометра сплошной линіей, а показанія термометра пунктиромъ, получаемъ графики недѣльныхъ температуръ и барометрическаго давленія, дающіе полную картину измѣненія погоды за недѣлю. Никакой путаницы и неясности здѣсь быть не можетъ. Если вы хотите прослѣдить линію барометра, справляйтесь съ цифрами налѣво; желаете прослѣдить температуру, смотрите цифры направо. Точно также каждая точка горизонтали соотвѣтствуетъ извѣстному часу и дню недѣли.

Но графики находятъ себѣ примѣненіе не въ одномъ только ученіи о погодѣ (метеорологіи). Можно сказать, что чѣмъ дальше, тѣмъ область ихъ примѣненія становится шире. Въ высшей степени плодотворно пользованіе графиками, напримѣръ, въ статистикѣ. Въ желѣзнодорожномъ дѣлѣ они представляютъ чуть ли не единственное средство для обозначенія движенія поѣздовъ,

и графики послѣдняго рода вы, вѣроятно, встрѣчали на стѣнахъ иныхъ станцій желѣзныхъ дорогъ. Графиками же часто пользуются на биржахъ для обозначенія колебаній курса. Графики— необходимое пособіе въ области практической механики, строительства и т. д., и т. д.

Вообще когда одна величина, Y, зависитъ отъ другой, X, такъ что съ измѣненіемъ X измѣняется Y, и если эти величины и измѣненія ихъ конечны, то съ помощью графика можно представить какое угодно измѣненіе величины Y въ зависимости отъ измѣненія X.

Величина Y въ такомъ случаѣ называется *функціей* отъ величины X. Пояснимъ нѣсколько подробнѣе это весьма употребительное въ математикѣ слово.

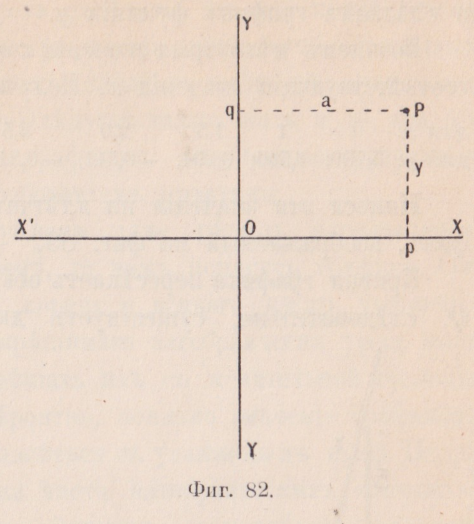
Если мы будемъ чертить рядъ окружностей, все болѣе и болѣе увеличивая радіусъ, то и самыя окружности будутъ все длиннѣе и длиннѣе. Слѣдовательно, длина окружности есть *функція* ея радіуса. Если къ резиновой нити подвѣсить тяжесть, то нить вытянется,—и вытянется больше или меньше въ зависимости отъ того, большую или меньшую тяжесть мы подвѣсимъ. Длина резиновой нити есть, слѣдовательно, *функція* подвѣшенной къ ней тяжести. Если подогрѣвать въ котлѣ паръ, то давленіе его увеличится—и тѣмъ больше, чѣмъ выше будетъ температура. Давленіе пара есть, слѣдовательно, *функція* температуры и т. д. Читатель можетъ теперь самъ подобрать сколько угодно примѣровъ величинъ, находящихся между собой въ функціональной зависимости.

Посредствомъ графика можно всегда наглядно представить функцію помощью чертежа. И для этого прибѣгаютъ всегда къ одному и тому же нижеслѣдующему пріему.

На клѣтчатой бумагѣ берутъ двѣ взаимно-перпендикулярныя линіи OX и OY, называемыя *осями координатъ* и пересѣкающіяся въ точкѣ O (Фиг. 82). Условимся, теперь, направленія вправо и вверхъ по осямъ считать положительными (съ знакомъ $+$), а направленія влѣво и внизъ — отрицательными (съ знакомъ —).

Какъ же намъ теперь графически изобразить нѣкоторую функцію y, зависящую отъ x?

Условимся въ единицѣ мѣры, принявъ, скажемъ, каждую сторону клѣтки на 1. Затѣмъ беремъ извѣстное значеніе для x и откладываемъ его по оси Ox вправо, если x положительно, и влѣво, если x отрицательно.



Фиг. 82.

Пусть, напр., въ данномъ случаѣ x изобразилось у насъ длиной Op. Для взятаго значенія x опредѣлимъ соотвѣтствующее значеніе y; пусть оно выразится числомъ, которое можно представить длиной Oq. Эту длину мы откладываемъ по оси OY вверхъ, если она со знакомъ $+$, и внизъ, если она со знакомъ $-$. Изъ точекъ p и q проведемъ теперь линіи, параллельныя осямъ OY и OX. Линіи эти пересѣкутся въ точкѣ P. Вотъ эта точка и представляетъ совокупность двухъ соотвѣтствующихъ значеній x и y. Построивъ рядъ такихъ точекъ и соединивъ ихъ непрерывной линіей, получаемъ графикъ, изображающій наглядно измѣненія функціи y въ зависимости отъ измѣненій x.

Способъ этотъ, какъ мы уже видѣли, былъ примѣненъ для полученія предыдущаго графика (фиг. 81) температуръ и барометрическаго давленія. Онъ, — повторяемъ, — общій для построенія всѣхъ графиковъ вообще.

Рѣшеніе уравненій.

При пользованіи графиками нѣтъ, вообще говоря, неразрѣшимыхъ уравненій. Для образца, ка̀къ при рѣшеніи ур-ій можно пользоваться графиками, возьмемъ простой примѣръ изъ «Практической математики» проф. Джона Перри. Пусть требуется графическимъ путемъ рѣшить ур-іе:

$$x^2 - 5{,}11x + 5{,}709 = 0.$$

Положимъ

$$y = x^2 - 5{,}11x + 5{,}709$$

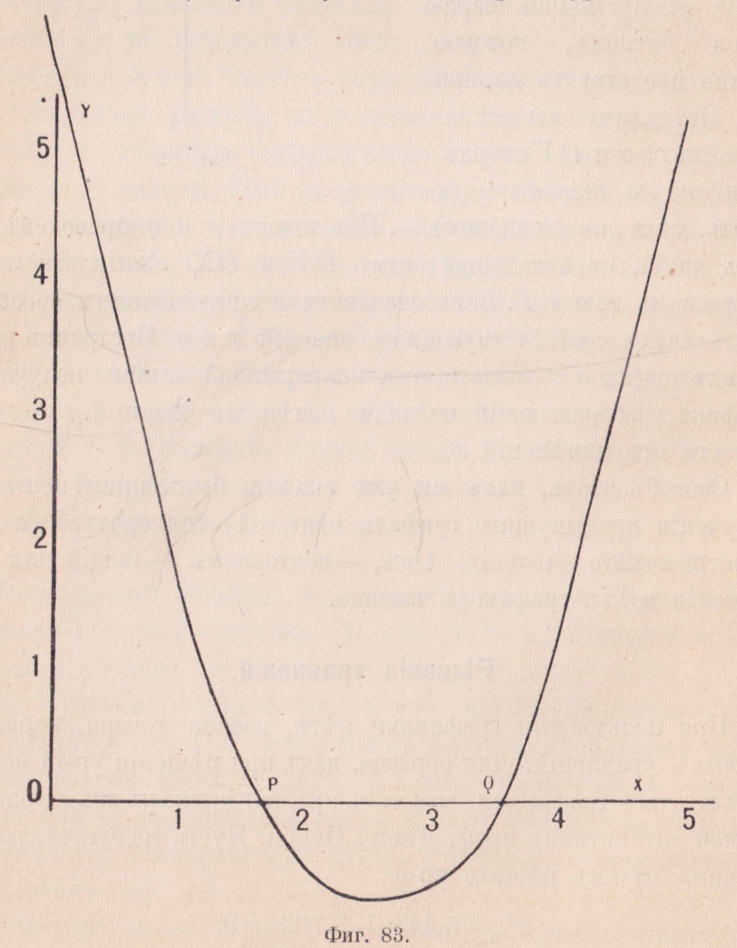
и сдѣлаемъ графикъ функціи y.

Возьмемъ нѣкоторыя значенія x отъ нуля до 5 и вычислимъ соотвѣтствующія значенія x. Получаемъ два ряда:

для x:	0	1	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	5,0
для y:	5,709;	1,599;	0,294;	—0,511;	—0,816;	—0,621;	—0,074;	1,269;	5,159

Нанося эти значенія на клѣтчатую бумагу, получаемъ графикъ, изображаемый на фиг. 83.

Кривая графика пересѣкаетъ ось OX въ двухъ точкахъ P и Q, слѣдовательно, существуетъ два корня уравненія x^2 —



Фиг. 83.

$-5{,}11x+5{,}709=0$. Вычисляя эти корни по графику, находимъ ихъ *приблизительную* величину: 1,65 и 3,46.

Вотъ здѣсь-то и слѣдуетъ отмѣтить, что всѣ почти результаты, получаемые помощью графиковъ, лишь *приблизительны,* а не вполнѣ точны. Это всегда слѣдуетъ имѣть въ виду, когда пользуемся графиками. Но слѣдуетъ также знать и то, что при тщательномъ составленіи графиковъ получаемые результаты вполнѣ удовлетворяютъ требованіямъ практики:

Итакъ, если мы не умѣемъ даже рѣшать алгебраически ур-ій 2-й, 3-й и 4-й степени, то намъ помогутъ графики. Они же могутъ помочь найти корень и всякаго иного уравненія, въ томъ числѣ даже неразрѣшимаго алгебраически ур-ія выше четвертой степени, и разрѣшать ихъ съ желательной степенью точности. Теперь вамъ, вѣроятно, понятно значеніе графиковъ, хотя врядъ ли можно согласиться съ уважаемымъ проф. Перри, который всякаго защитника чисто алгебраическихъ «точныхъ» способовъ рѣшенія задачъ обзываетъ «самоувѣреннымъ, какъ пѣтухъ, академическимъ ученымъ съ деревянной головой».

Хорошо именно то, что для даннаго случая нужно!—можно на это сказать.

Къ числу преимуществъ графиковъ предъ иными способами рѣшенія задачъ принадлежитъ еще *наглядность,*—возможность дѣйствовать на умъ посредствомъ глаза. Это, въ частности, для педагога—великая вещь!

Но перейдемъ къ нѣкоторымъ другимъ задачамъ, рѣшаемымъ съ помощью графиковъ. Задачи эти, вѣроятно, болѣе всего объяснятъ намъ тотъ секретъ рѣшенія задачъ на шахматной доскѣ, о которомъ мы упоминали въ началѣ этой главы.

Задача 56-я.

Знаменитая задача Люка.

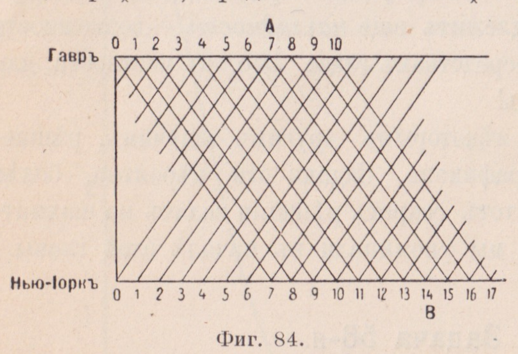
Вотъ задача, предложенная извѣстнымъ (нынѣ покойнымъ) математикомъ Эдуардомъ Люка, о возникновеніи которой талантливый математикъ г. Лэзанъ разсказываетъ слѣдующую исторію, ручаясь за ея полную достовѣрность:

На одномъ научномъ конгрессѣ, въ концѣ завтрака, на которомъ находилось много извѣстныхъ математиковъ, и между ними было нѣсколько знаменитостей разныхъ національностей, Эдуардъ Люка вдругъ объявилъ, что онъ хочетъ задать имъ одинъ изъ самыхъ трудныхъ вопросовъ:

«Я полагаю, что каждый день, въ полдень, отправляется пароходъ изъ Гавра въ Нью-Іоркъ и въ то же самое время пароходъ той же компаніи отправляется изъ Нью-Іорка въ Гавръ. Переѣздъ совершается ровно въ 7 дней въ томъ и другомъ направленіи. Сколько судовъ своей компаніи, идущихъ въ противоположномъ направленіи, встрѣтитъ пароходъ, отправляющійся сегодня въ полдень изъ Гавра?»

Рѣшеніе.

Нѣкоторые изъ присутствовавшихъ знаменитостей,—говоритъ по этому поводу Лэзанъ,—опрометчиво отвѣтили «семь!» Большинство же хранило молчаніе. Ни одинъ не далъ вѣрнаго отвѣта, но если бы для рѣшенія этой задачи призвать на помощь графикъ, представленный на фиг. 84, то рѣшеніе вырисовалось бы тотчасъ со всей ясностью. Слушавшіе Люка, очевидно, думали только о пароходахъ, которые должны еще отправиться въ путь, забывая о тѣхъ, которые уже въ дорогѣ. Вѣрно же то, что пароходъ, графикъ котораго на фиг. 83-й изображенъ линіей *AB*, встрѣтитъ на морѣ 13 судовъ, да еще тотъ, который входитъ въ Гавръ въ моментъ его отъѣзда, и еще тотъ который отправляется изъ Нью-Іорка въ моментъ его прибытія, или *всего 15 судовъ*. Графикъ показываетъ, кромѣ того, что встрѣчи будутъ происходить ежедневно въ полдень и въ полночь.



Фиг. 84.

Если бы кто сомнѣвался еще до сихъ поръ въ огромной пользѣ графиковъ, то настоящая задача, думаемъ, должна разсѣять подобныя сомнѣнія. Тонкій и сложный вопросъ получаетъ въ данномъ случаѣ быстрое, простое и наглядное рѣшеніе.

Задача 57-я.

Курьеры.

Въ общераспространенныхъ задачникахъ въ ряду иныхъ часто встрѣчаются «задачи о курьерахъ», или путникахъ, или поѣздахъ, идущихъ съ различной скоростью отъ извѣстнаго пункта, вдогонку другъ за другомъ или же навстрѣчу одинъ другому. При этомъ спрашивается обыкновенно *время* ихъ встрѣчи и разстояніе мѣста встрѣчи отъ точки отправленія.

Задачи эти слишкомъ общеизвѣстны, чтобы о нихъ стоило много здѣсь говорить. Въ школахъ они относятся обыкновенно къ числу «трудныхъ». Укажемъ поэтому здѣсь, что задачи и этого рода могутъ рѣшаться съ помощью графиковъ. Для этого, взявъ разграфленную въ клѣтки бумагу и построивъ двѣ взаимно перпендикулярныя оси, мы на оси OX откладываемъ время, а на оси OY соотвѣтствующія разстоянія, и строимъ затѣмъ по прежнему графики для каждаго «курьера», «путника», «поѣзда» и т. д. Точка пересѣченіе графиковъ съ совершенно достаточной точностью опредѣлитъ время и мѣсто встрѣчи: для этого нужно только изъ этой точки опустить перпендикуляры на оси OX и OY. Пересѣченіе перпендикуляра съ первой осью дастъ точку, по которой опредѣляется *время* встрѣчи, а пересѣченіе другого перпендикуляра съ осью OY дастъ точку, которая позволитъ намъ опредѣлить *разстояніе* мѣста встрѣчи отъ точки отправленія.

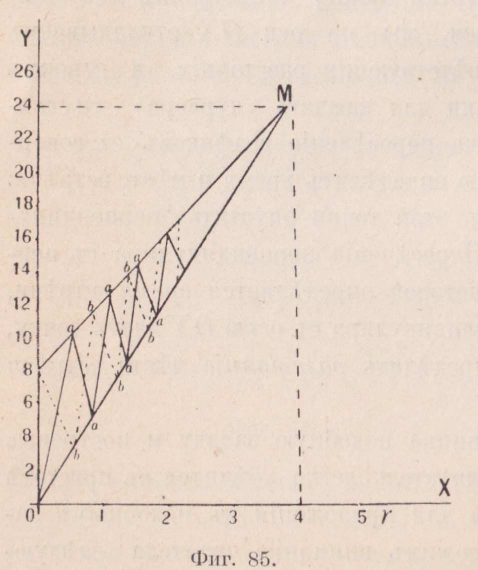
Взявъ изъ любого задачника подобную задачу и построивъ соотвѣтствующіе графики, читатель легко убѣдится въ простотѣ и пригодности этого метода для приложенія къ подобнымъ задачамъ. Здѣсь же мы предложимъ вниманію читателя слѣдующую болѣе сложную задачу о собакѣ и двухъ путешественникахъ, рѣшить которую безъ помощи графиковъ не такъ-то легко.

Задача 58-я.

Собака и два путешественника.

Два пѣшехода идутъ по одной и той же дорогѣ, въ одномъ и томъ же направленіи. Первый, *A*, находится на 8 клм. впереди другого и дѣлаетъ 4 клм. въ часъ; второй, *B*, дѣлаетъ по 6 клм. въ часъ. У одного изъ путешественниковъ есть собака, которая, именно въ тотъ моментъ, когда мы говоримъ, бѣжитъ къ другому путешественнику, со скоростью 15 клм. въ часъ, потомъ сейчасъ же возвращается къ своему хозяину; прибѣжавъ къ нему, она снова бѣжитъ къ другому путешественнику, и такъ до тѣхъ поръ перебѣгаетъ отъ одного къ другому, пока оба путешественника встрѣтятся. Нужно узнать, какой путь пробѣжитъ собака.

Рѣшеніе.



Фиг. 85.

На оси *OX* откладываемъ время, а на оси *OY* разстоянія. Вопросъ можно разсматривать двояко, смотря по тому, кому изъ путешественниковъ принадлежитъ собака. На фиг. 85 считается время съ того момента, когда собака выпущена.

Графики двухъ путешественниковъ суть *OM* и 8*M*, и точка *M*, т. е. встрѣчный пунктъ, какъ видно изъ фиг. 85-ой, соотвѣтствуетъ разстоянію въ 24 километра и 4 часамъ ходьбы. Если собака принадлежитъ путнику, который сзади, то графикъ ея пути есть *Oaa*..., лома-

ная линія между графиками хода двухъ пѣшеходовъ. Если она принадлежитъ путешественнику, идущему впереди, то графикъ ея пути есть $8bb$..., такая же по происхожденію ломаная линія, но отличная отъ первой. Въ обоихъ случаяхъ, тѣмъ не менѣе, животное не перестаетъ бѣжать въ продолженіе 4 часовъ и, дѣлая по 15 километровъ въ часъ, пробѣгаетъ 60 километровъ. Очевидно, въ томъ и въ другомъ случаѣ результатъ одинъ и тотъ же.

Можно предположить, что путешественники идутъ другъ другу навстрѣчу, и, вообще,—всячески видоизмѣнять условія задачи. Въ зависимости отъ этого измѣнятся нѣсколько и графики, но способъ рѣшенія остается тотъ же.

На этомъ мы и закончимъ главу о графикахъ, предлагая читателю разрабатывать дальше этотъ вопросъ самому. Въ вопросахъ изъ области физики и механики найдется въ особенности много задачъ, рѣшаемыхъ графически. Рекомендуемъ также вниманію читателя книгу Джона Перри: «Практическая математика» (есть въ русскомъ переводѣ). Въ этой книжкѣ вопросъ о графикахъ разобранъ съ надлежащей полнотой и ясностью. Не совѣтуемъ лишь увлекаться тѣми полемическими выпадами противъ «теоретиковъ», которыми почтенный авторъ безъ видимой нужды уснастилъ кое-гдѣ свою въ общемъ полезную книгу.

Возвращаясь къ тому, съ чего началась эта глава, т. е. къ оставшемуся въ неизвѣстности «чудо-математику», рѣшавшему задачи съ помощью шахматной доски, мы должны признать, что это возможно. Рѣчь идетъ, очевидно, о графикахъ. При навыкѣ, *нѣкоторыя* задачи съ помощью ихъ, какъ видимъ, можно рѣшать удивительно быстро. «Нѣкоторыя»,—говоримъ,—но не *всѣ!* Вотъ почему намъ кажется, вопреки увѣреніямъ почтеннаго захолустнаго обывателя, что не *всякую* задачу могъ «моментально» рѣшать бѣлорусскій «чудо-математикъ».

Объ аксіомахъ элементарной алгебры.

При изученіи элементарной алгебры къ рѣшенію уравненій приступаютъ обыкновенно съ такими аксіомами:

1.—*Величины, равныя порознь одной и той же величинѣ или равнымъ величинамъ, равны между собой.*

2.—*Если къ равнымъ величинамъ прибавить равныя же, то и суммы получатся равныя.*

3.—*Если отъ равныхъ величинъ отнять поровну, то и остатки получатся равныя.*

4.—*Если равныя величины умножать на равныя, то и произведенія получатся равныя.*

5.—*Если равныя величины раздѣлить на равныя, то и частныя получатся равныя.*

6.—*Цѣлое больше каждой изъ своихъ частей.*

7.—*Одинаковыя степени или одинаковые корни отъ равныхъ величинъ равны.*

Эти освященныя временемъ «общія понятія» составляютъ основу теоретической ариѳметики. На нихъ обосновываются точно также и алгебраическія разсужденія.

Но въ высшей степени необходимо относительно этихъ аксіомъ сдѣлать соотвѣтствующія поясненія и оговорки, когда мы распространяемъ ихъ на область алгебраическихъ количествъ. Обобщеніе свойственно математикѣ. Когда мы обобщаемъ, мы отбрасываемъ всѣ ограниченія, которыя были раньше установлены, или подразумѣвались. Предположеніе, вѣрное съ прежде бывшими ограниченіями, безъ нихъ можетъ быть вѣрно и

невѣрно. Пояснимъ примѣромъ: при переходѣ отъ геометріи двухъ измѣреній (планиметрія) къ геометріи трехъ измѣреній (стереометрія) приходится отбросить то ограниченіе, которое необходимо подразумѣвалось въ геометріи на плоскости,— а именно, что всѣ разсматриваемыя фигуры лежатъ въ плоскости нашего чертежа, или доски, на которой фигуры изображены (за исключеніемъ, конечно, того случая, когда мы мысленно переворачиваемъ фигуры для наложенія ихъ одну на другую). Нѣкоторыя изъ теоремъ, вѣрныя для геометріи на плоскости, безъ всякихъ измѣненій переходятъ и въ стереометрію, а другія—нѣтъ. Сравните въ этомъ отношеніи, хотя бы, двѣ такихъ теоремы планиметріи: 1) черезъ точку, данную *внѣ* взятой прямой, можно на эту прямую опустить только *одинъ* перпендикуляръ и 2) изъ точки, взятой *на* данной прямой, можно къ этой прямой возставить только *одинъ* перпендикуляръ. Первая изъ этихъ теоремъ безо всякихъ оговорокъ приложима и къ геометріи въ пространствѣ, а вторая—нѣтъ.

Для второго, еще болѣе яркаго, примѣра обратимся къ вопросу (см. стр. 124): можетъ ли быть число разложено на болѣе чѣмъ одну группу первоначальныхъ множителей?

Нѣтъ!—отвѣтятъ вамъ,—если подъ множителями подразумѣвать обыкновенныя ариѳметическія числа.

Да!—съ неменьшимъ правомъ отвѣтитъ другой,—если въ понятіе о числѣ включить и комплексныя (или такъ называемыя «мнимыя») количества.

Въ первомъ случаѣ число 26, напримѣръ, разлагается на первоначальные множители только единственнымъ путемъ: $26 = 2 \times 13$; а во второмъ:

$$26 = 2 \times 13 = (5 + \sqrt{-1})\ (5 - \sqrt{-1}).$$

Такихъ примѣровъ, впрочемъ, можно привести очень много, и въ настоящей книгѣ намъ какъ приходилось, такъ и придется съ ними встрѣчаться не разъ.

Такимъ образомъ, мы можемъ всегда ожидать, что аксіомы ариѳметики могутъ нуждаться въ нѣкоторыхъ видоизмѣненіяхъ или дополненіяхъ, если попробовать ихъ распространить на

область алгебраическихъ количествъ. И это мы находимъ на самомъ дѣлѣ. Къ сожалѣнію, мы не всегда замѣчаемъ, чтобы авторы учебниковъ обращали вниманіе своихъ читателей на подобныя видоизмѣненія иныхъ аксіомъ, или даже, чтобы они сами примѣняли эти аксіомы съ надлежащей осторожностью. Между тѣмъ мы прежде всего должны требовать отъ научной аксіомы, чтобы она была совершенно вѣрна и вполнѣ соотвѣтствовала *смыслу*, *въ которомъ извѣстныя выраженія употребляются въ этой наукѣ*.

Пятая, напримѣръ, изъ вышеприведенныхъ аксіомъ, или «аксіома дѣленія», должна быть сопровождаема необходимой, но тѣмъ не менѣе рѣдко встрѣчающейся оговоркой: ...«раздѣлить на равныя, только *не на нуль*».

Безъ такого ограниченія высказываемое положеніе далеко отъ аксіомы.

Въ иномъ учебникѣ, гдѣ приведена шестая изъ вышеуказанныхъ «аксіомъ», читатель на слѣдующей страницѣ можетъ найти такое, напримѣръ, выраженіе.

$$+2-5+7-1=+3,$$

гдѣ «$+3$» есть «цѣлое» или *сумма*». Видя, что одна изъ частей этого «цѣлаго» есть $+7$, иной читатель можетъ искренне подивиться, какъ же это совмѣщается съ «аксіомой», что «цѣлое больше каждой своей части».

Въ седьмой аксіомѣ одинаковыя степени и корни изъ равныхъ количествъ равны только *ариѳметически*. Иначе говоря,— одинаковые дѣйствительные корни изъ равныхъ количествъ равны при условіи одинаковыхъ знаковъ.

Употребляя въ аксіомѣ слово «равный», не принимаемъ ли мы его какъ бы въ смыслѣ «тотъ самый»? Напримѣръ, если два числа тѣ же самыя, что и третье число, то и первое есть то же число, что и второе, и т. д.

О приложеніи аксіомъ къ рѣшенію уравненій.

Иногда въ элементарныхъ руководствахъ, а тѣмъ болѣе въ объясненіяхъ иныхъ репетиторовъ и даже преподавателей, дѣло ставится такъ, что какъ будто при дѣйствіяхъ надъ уравненіями возможно прямое, непосредственное приложеніе аксіомъ. Возьмемъ для примѣра постоянно встрѣчающееся и въ учебникахъ и въ учебной практикѣ такое разсужденіе:

Дано уравненіе

$$3x + 4 = 19.$$

Вычитая изъ каждой части по 4, получимъ

$$3x = 15 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (\text{аксіома } 3).$$

Дѣля обѣ части на 3, получаемъ

$$x = 5 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (\text{аксіома } 5).$$

И уравненіе считается рѣшеннымъ (безо всякихъ оговорокъ) непосредственнымъ приложеніемъ аксіомъ. Но это доказываетъ только, насколько распространены на этотъ счетъ совершенно ошибочные или непродуманные взгляды.

Хотя въ выполненныхъ выше алгебраическихъ дѣйствіяхъ и нѣтъ ошибки, но ссылка для поясненія этихъ дѣйствій просто на аксіомы можетъ толкнуть ученика на ложный путь. «Со спокойнымъ сердцемъ», какъ говорится, при такомъ способѣ разсужденій онъ подѣлитъ обѣ части уравненія на неизвѣстное, если это возможно, и не замѣтитъ, что при этомъ уже теряется одно рѣшеніе (корень) уравненія. Точно также «приложеніемъ» той или иной «аксіомы» онъ можетъ ввести въ вопросъ совершенно постороннее рѣшеніе.

Слѣдуетъ разъ и навсегда освоиться съ мыслью, что прямое, непосредственное примѣненіе аксіомъ къ рѣшенію уравненій неприложимо,—и вотъ почему:

А.—Можно, слѣдуя аксіомамъ и не сдѣлавъ никакой ошибки въ дѣйствіяхъ, получить, все же, невѣрный результатъ.

B.—Можно нарушать аксіомы, т. е. поступать вопреки ихъ прямымъ указаніямъ, и, все же, получить вѣрный результатъ.

C.—Аксіомы по самой внутренней сущности не могутъ прямо и непосредственно примѣняться къ уравненіямъ.

Разсмотримъ теперь каждое изъ высказанныхъ выше положеній отдѣльно.

A.—*Примѣненіе аксіомъ и полученіе ошибки.*

Пусть дано

$$x-1=2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Умножаемъ обѣ части уравненія на $x-5$, получаемъ

$$x^2-6x+5=2x-10 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{акс. } 4$$

Вычитаемъ изъ обѣихъ частей уравненія по $x-7$:

$$x^2-7x+12=x-3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{акс. } 3$$

Дѣлимъ обѣ части ур-ія на $x-3$:

$$x-4=1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{акс. } 5$$

Прибавляя къ обѣимъ частямъ по 4, находимъ

$$x=5 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{акс. } 2$$

Но найденное рѣшеніе не удовлетворяетъ данному уравненію (1). Единственный корень его, какъ легко убѣдиться, есть $x=3$. Итакъ, совершенно съ виду правильно разсуждая и не сдѣлавъ ни одной ошибки въ дѣйствіяхъ, мы пришли къ невѣрному рѣшенію. Въ чемъ же дѣло?

Недоразумѣнія на этотъ счетъ (особенно при выясненіи такъ называемыхъ «математическихъ софизмовъ») настолько обыкновенны, что остановимся на вопросѣ подробнѣе, рискуя даже нѣсколько наскучить читателю. Прослѣдимъ пройденный нами путь:

Умноженіе на $x-5$ ввело новое рѣшеніе: $x=5$, а дѣленіе на $x-3$ исключило корень $x=3$. Аксіомы, приведенныя

въ предыдущей главѣ и надлежаще понятыя, исключаютъ дѣленіе на нуль. Въ этомъ мы убѣждаемся и на данномъ примѣрѣ, такъ какъ дѣленіе ур-нія на $x-3$ есть въ сущности дѣленіе на нуль, ибо число 3 удовлетворяетъ ур-ію (есть его корень). Говоря точнѣе, все это показываетъ, что при дѣйствіяхъ надъ уравненіемъ существо вопроса состоитъ въ томъ, чтобы значеніе входящаго въ него неизвѣстнаго оставалось вѣрнымъ и неизмѣннымъ. Необходимость квалифицировать аксіомы примѣнительно къ этому требованію выдвигаетъ важное начало *эквивалентности* уравненій, или *равнозначности* ихъ, говоря по-русски. Необходимо, чтобы послѣ всякихъ преобразованій уравненія всякое новое по виду получаемое уравненіе было эквивалентно (или равнозначно) данному; т. е., чтобы можно было съ увѣренностью сказать, что всѣ произведенныя надъ уравненіемъ дѣйствія не измѣнили значенія входящихъ въ него неизвѣстныхъ, не ввели новыхъ рѣшеній, или не лишили его прежнихъ.

Не входя въ излишнія здѣсь теоретическія подробности, приведемъ, для ясности, по этому поводу нѣсколько простѣйшихъ примѣровъ.

Если къ обѣимъ частямъ даннаго уравненія прибавить или отъ обѣихъ частей вычесть одно и то же выраженіе (хотя бы даже содержащее неизвѣстное), то это не измѣнитъ значеніе x въ уравненіи (вновь полученное ур-іе, значитъ, будетъ эквивалентно, или равнозначно, данному).

Точно также значеніе x не измѣнится, если данное ур-іе умножить или раздѣлить на какое-либо извѣстное число, кромѣ нуля,

Но если обѣ части уравненія умножить или раздѣлить на количество, содержащее неизвѣстное, то вновь полученное ур-іе будетъ, вообще говоря, *не*-эквивалентно данному.

Если бы послѣ высказанныхъ здѣсь замѣчаній у читателя остались еще какія-либо сомнѣнія и возраженія, то мы просили бы его внимательно заняться началомъ эквивалентности по лучшимъ учебникамъ и руководствамъ, съ одной стороны, и дѣйствіями надъ уравненіями съ другой. Тогда онъ быстро убѣдится, что къ вопросу объ уравненіяхъ нельзя подходить *прямо* съ однѣми аксіомами.

Необходимо оговориться также, что все предыдущее нисколько не посягаетъ на правильность и незыблемость аксіомъ,— оно возражаетъ только противъ ихъ примѣненія тамъ, гдѣ онѣ прямо непримѣнимы.

Иной можетъ возразить, что мы искусственно нагромоздили прямое примѣненіе аксіомъ къ рѣшенію уравненія (1) въ случаѣ **А**, и что никто не сталъ бы рѣшать такъ это простое уравненіе. Въ *этомъ* ур-іи (1) рѣшеніе, дѣйствительно, само бросается въ глаза, и каждый, пожалуй, скажетъ его, просто взглянувъ на ур-іе. Но станетъ ли кто возражать, что въ громадномъ большинствѣ случаевъ сложныя ур-ія учениками рѣшаются именно *такъ*, какъ мы это привели выше съ ур-іемъ (1). Простой же и наглядный примѣръ выбранъ здѣсь для того, чтобы убѣдительнѣе привести къ нелѣпости (*reductio ad absurdum*) ложь начальнаго положенія.

B. — *Нарушеніе аксіомъ и вѣрный результатъ.*

Чтобы избѣжать возраженія, что нарушеніемъ одновременно двухъ или болѣе аксіомъ мы какъ-либо уравниваемъ допущенную ошибку, возьмемъ примѣръ, гдѣ поступимъ вопреки прямымъ указаніямъ только *одной* аксіомы.

$$x - 1 = 2 \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (1)$$

Прибавимъ 10 *только къ первой части* этого ур-ія. Такимъ образомъ мы самымъ грубымъ образомъ нарушаемъ предписаніе «аксіомы сложенія» и получаемъ

$$x + 9 = 2 \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (2)$$

Помножимъ обѣ части ур-ія на $x - 3$:

$$x^2 + 6x - 27 = 2x - 6. \ . \ . \ . \ . \ (3) \text{ акс. } 4$$

Вычтемъ изъ обѣихъ частей ур-ія по $2x - 6$:

$$x^2 + 4x - 21 = 0. \ . \ . \ . \ . \ . \ (4) \text{ акс. } 3$$

Раздѣлимъ обѣ части на $x + 7$:

$$x - 3 = 0. \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (5) \text{ акс. } 5$$

Прибавляя къ обѣимъ частямъ по 3, имѣемъ

$x = 3$ . . . . акс. 2

Полученное рѣшеніе 3 есть *вѣрный корень* даннаго ур-ія (1), несмотря на то, что нами допущено единственное грубое противорѣчіе противъ аксіомы 2-й, которое не могло быть уравновѣшено неправильнымъ приложеніемъ какой-либо другой аксіомы, ибо въ остальномъ мы прямо и точно прилагали «аксіомы». Изъ предыдущаго (**А**) уже ясно, что невѣрнымъ пониманіемъ приложенія аксіомъ мы получили затѣмъ здѣсь ур-ія (3) и (5) неэквивалентныя данному, а потому и получили такой «неожиданный» результатъ.

С.—*Аксіомы по самой своей сущности не имѣютъ прямого отношенія къ уравненіямъ.*

Аксіома говоритъ: если къ равнымъ величинамъ прибавить равныя и т. д., то и результаты будутъ равны. Вопросъ же, преслѣдуемый разрѣшеніемъ уравненія, состоитъ въ томъ: *для какого значенія x обѣ части ур-ія будутъ равны*? Такимъ образомъ, если къ одной части уравненія придать нѣкоторую величину, не придавая ея къ другой; то, все же, *для нѣкотораго значенія x*, хотя бы и новаго, въ результатѣ получится равенство.

Ариѳметика, имѣя дѣло съ обыкновенными числами, стремится только узнать, что извѣстное получаемое въ результатѣ число равно извѣстному другому. Но алгебра, имѣя дѣло съ уравненіями (условными равенствами) желаетъ знать, *при какихъ условіяхъ* данныя выраженія представляютъ одни и тѣ же числа,—другими словами, для какихъ значеній неизвѣстнаго данное уравненіе вѣрно.

Въ отдѣлѣ **В** настоящей главы возраженіе противъ уравненія (2) состоитъ не въ томъ, что первая часть его равна второй (онѣ «равны» настолько же, насколько и обѣ части перваго даннаго ур-ія), но въ томъ, что обѣ его части не равны *для того же значенія x*, какъ и въ ур-іи (1). Словомъ, ур-іе (1) *неэквивалентно* (2).

Вообще, изученіе и выводъ принципа эквивалентности можетъ дать многое въ смыслѣ математическаго развитія каждому желающему поработать въ области математики. Прежде всего, какъ видимъ, это натолкнетъ его на надлежащее приложеніе аксіомъ. Въ примѣненіи къ уравненіямъ, напр., аксіомы играютъ роль только при выводахъ и доказательствахъ начала эквивалентности. Прямое же приложеніе ихъ къ рѣшенію уравненій есть заблужденіе, котораго слѣдуетъ всячески избѣгать.

Провѣрка рѣшенія уравненія.

Весьма часто учащіеся *«доказываютъ»* правильность рѣшенія какого-либо уравненія такимъ путемъ. Найденную величину для неизвѣстнаго подставляютъ въ обѣ части даннаго уравненія, затѣмъ надъ обѣими частями полученнаго выраженія продѣлываютъ указанныя знаками дѣйствія и, получивъ числовое тождество, смѣло говорятъ: «что и требовалось доказать», хотя... непригодность подобнаго «доказательства» можно въ свою очередь доказать на примѣрахъ, гдѣ получаемая нелѣпость прямо бьетъ въ глаза.

Возьмемъ такой примѣръ:

$$1+\sqrt{x+2}=1-\sqrt{12-x} \quad \dots\dots\dots (1)$$

И, рѣшая его такъ, какъ обыкновенно это дѣлается, получаемъ:

$$\sqrt{x+2}=-\sqrt{12-x}; \quad \dots\dots\dots\dots (2)$$

$$x+2=12-x; \quad \dots\dots\dots\dots (3)$$

$$2x=10;$$

$$x=5.$$

Найденное значеніе для x подставимъ въ данное уравненіе (1) и «докажемъ» правильность рѣшенія:

$$1+\sqrt{5+2}=1-\sqrt{12-5};$$

$$\sqrt{5+2}=-\sqrt{12-5};$$

$$5+2=12-5;$$

$$7=7.$$

Казалось бы, все обстоитъ благополучно, хотя на самомъ дѣлѣ не трудно видѣть, что если мы въ уравненіе (1) подставимъ вмѣсто x число 5 и приведемъ обѣ части къ простѣйшему виду, то получается для первой части $1+\sqrt{7}$, а для второй: $1-\sqrt{7}$,—числа явно неравныя другъ другу, а потому, слѣдовательно, 5 *не есть корень* даннаго уравненія, что̀ бы ни утверждала приведенная нами выше «провѣрка».

Корень 5 былъ незамѣтно введенъ въ уравненіе, когда обѣ его части возвышались въ квадратъ. Другими словами,—корень 5 удовлетворяетъ уравненію (3), но никакъ не (1) и не (2). Но если бы въ какомъ либо изъ уравненій, (1) или (2), измѣнить знакъ, то получилось бы уравненіе, удовлетворяющееся рѣшеніемъ $y=5$; а именно:

$$1+\sqrt{x+2}=1+\sqrt{12-x}.$$

Итакъ, необходимо всегда помнить, что если раціональное уравненіе получается изъ ирраціональнаго путемъ возвышенія въ степень, то существуетъ всегда другое ирраціональное уравненіе, отличающееся отъ даннаго только знакомъ какого-либо члена или членовъ, и изъ котораго также можно получить то же самое раціональное уравненіе.

Софистическая карикатура.

Разобранный нами выше неправильный методъ «доказательства» вѣрности рѣшенія уравненія можно свести къ довольно извѣстному, хотя и грубому логическому софизму, стремящемуся «доказать», что всякое математическое дѣйствіе можно свести на что угодно.

Доказать, что $5=1$?

Вычитая изъ каждой части по 3, находимъ: $2=-2$.

Возвышая въ квадратъ обѣ части: $4=4$.

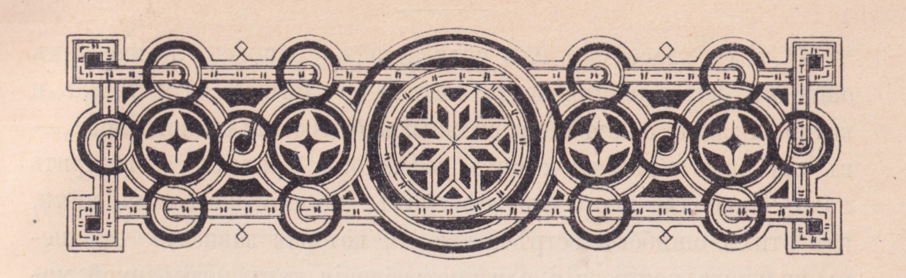
Итакъ $5=1$!..

Неправильные отвѣты.

Въ учебникахъ и задачникахъ алгебры нерѣдко можно встрѣтить уравненіе такого вида:

$$x + 5 - \sqrt{x + 5} = 6,$$

и въ «отвѣтахъ», гдѣ приведены рѣшенія задачъ, кратко сообщается, что корни этого уравненія суть «4, или—1». Это невѣрно. Рѣшеніе даннаго уравненія есть 4, а — 1 не есть рѣшеніе. Къ несчастью, подобнаго рода задачи, безъ надлежащихъ разъясненій, встрѣчаются чаще, чѣмъ слѣдуетъ.



Алгебраическіе софизмы.

Какой-то острякъ увѣрялъ, что во всей литературѣ существуетъ на самомъ дѣлѣ только небольшое число основныхъ остротъ или анекдотовъ, но со многими видоизмѣненіями. Онъ пытался даже дать классификацію остроумныхъ изреченій, сводя ихъ къ небольшой таблицѣ типичныхъ примѣровъ. Другой остроумецъ уменьшилъ и это число типовъ, сведя ихъ, сколько помнится, всего къ тремъ. Нашелся и такой, который заявилъ, что ни остротъ, ни шутокъ, вообще, не существуетъ. Успѣлъ ли этотъ послѣдній дѣйствительно исключить понятіе объ остроуміи, какъ таковомъ, или же къ огромному запасу старыхъ остротъ онъ прибавилъ еще одну,—это, конечно, зависитъ отъ взгляда на предметъ.

Въ настоящей главѣ мы, все же, сдѣлаемъ попытку если не классифицировать, то до нѣкоторой степени освѣтить хотя бы нѣкоторые изъ наиболѣе распространенныхъ алгебраическихъ, такъ называемыхъ, «софизмовъ» или парадоксовъ. При этомъ наша цѣль—не хитроумно запутывать вопросы, а разобрать извѣстные типы этого рода задачъ, рискуя даже въ значительной степени лишить ихъ присущей имъ «таинственности». Софизмы подобны привидѣніямъ,—они не выносятъ свѣта. Анализъ гибеленъ для извѣстнаго рода вопросовъ.

О тѣхъ классахъ, или подклассахъ, общихъ логическихъ ошибокъ, которыя приводитъ въ своей «Логикѣ» Аристотель и которыя зависятъ отъ неправильныхъ построеній силлогизмовъ,— въ случаяхъ математическихъ софизмовъ приходится говорить мало. Наиболѣе часто въ софизмахъ, разсматриваемыхъ нами, изъ этихъ ошибокъ встрѣчается та, которая зависитъ отъ неправильнаго построенія или употребленія такъ называемой малой посылки. Въ математикѣ подобное логическое противорѣчіе прикрывается незамѣтнымъ для новичка допущеніемъ нѣкотораго обратнаго, съ виду очевиднаго, предложенія, или же примѣненіемъ процесса математическихъ дѣйствій, который кажется неоспоримымъ, каково бы ни было его приложеніе по существу. Возьмемъ хотя бы такой примѣръ:

Пусть c будетъ среднее ариѳметическое между двумя *неравными* числами a и b, т. е. $c = \frac{a+b}{2}$, и слѣдовательно:

$$a + b = 2c \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Отсюда

$$(a + b)(a - b) = 2c(a - b);$$

$$a^2 - b^2 = 2ac - 2bc;$$

Перенеся члены, имѣемъ:

$$a^2 - 2ac = b^2 - 2bc.$$

Придавая къ обѣимъ частямъ равенства по c^2:

$$a^2 - 2ac + c^2 = b^2 - 2bc + c^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Отсюда

$$(a - c)^2 = (b - c)^2;$$

или

$$a - c = b - c \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

Слѣдовательно,

$$a = b.$$

А между тѣмъ было дано, что a и b неравны! Въ чемъ же дѣло?

Конечно, обѣ части равенства (3) ариѳметически равны, но *знаки*-то этихъ чиселъ противоположны; такъ что равны только ихъ квадраты (2). Допускаемая здѣсь ошибка настолько оче-

видна, что, казалось бы, не стоило объ ней и говорить, если бы въ томъ или иномъ видѣ на ней не строились весьма многіе такъ называемые «математическіе софизмы».

Указывая въ предыдущей главѣ на ошибочные пріемы провѣрки правильности рѣшенія уравненій, мы привели тамъ (стр. 145) другой примѣръ получаемаго, яко бы математически, абсурда. Поставимъ теперь вопросъ на общелогическую почву, и мы тотчасъ найдемъ источникъ всѣхъ нашихъ ложныхъ выводовъ. Въ сущности, мы строимъ неправильные силлогизмы, подобные нижеслѣдующимъ, которые нарочно приводимъ параллельно въ рядомъ стоящихъ столбцахъ:

Птица животное.

Лошадь—животное.

Слѣд.: Лошадь есть птица.

Два равныхъ числа имѣютъ равные квадраты.

Эти два числа имѣютъ равные квадраты.

Слѣд.: Эти два числа равны.

По поводу каждаго изъ этихъ неправильныхъ логическихъ построеній съ полнымъ правомъ можно привести и два такихъ параллельныхъ замѣчанія:

Даже малоразвитой человѣкъ будетъ издѣваться надъ такимъ заключеніемъ, ибо оно нелѣпо; но тотъ же человѣкъ не замѣтитъ иногда подобной же ошибки въ устахъ, напримѣръ, политическаго оратора, — особенно своей партіи.

Каждый «первокурсникъ» высшей школы посмѣется всякій разъ, какъ получается нелѣпое заключеніе: и онъ же съ легкимъ сердцемъ готовъ примириться съ ошибочными методами провѣрки рѣшеній, указанными въ предыдушей главѣ.

Въ случаяхъ, когда приходится имѣть дѣло съ квадратными корнями, подмѣтить ошибку иногда не такъ-то легко. По общему соглашенію о знакахъ, если нѣтъ особой оговорки, то передъ $\sqrt{}$ подразумѣвается знакъ $+$. Сообразно съ этимъ для положительныхъ четныхъ или дѣйствительныхъ нечетныхъ

корней вѣрно, что «одинаковые корни изъ равныхъ количествъ равны»; и отсюда

$$\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}.$$

Но если a и b отрицательны, а n—четно, то этого тождества уже не существуетъ, и, принимая его, мы приходимъ къ абсурду:

$$\sqrt{(-1)(-1)}=\sqrt{-1}\sqrt{-1};$$

$$\sqrt{1}=(\sqrt{-1})^2;$$

$$1=-1.$$

Или же, принимая, что $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ для всякихъ значенiй буквъ, мы, казалось бы, можемъ написать слѣдующее тождество (ибо каждая часть его $=\sqrt{-1}$):

$$\sqrt{\frac{1}{-1}}=\sqrt{\frac{-1}{1}}$$

Отсюда

$$\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{-1}}=\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{1}}$$

Освобождая отъ дробей:

$$(\sqrt{1})^2=(\sqrt{-1})^2$$

или

$$1=-1.$$

Эти «обманы по несчастью», гдѣ, отправляясь отъ общаго правила, приходятъ къ такому спецiальному случаю, когда нѣкоторыя особыя обстоятельства дѣлаютъ это правило неприложимымъ, а также софизмы, получаемые обратнымъ путемъ, извѣстный математикъ Морганъ предлагалъ раздѣлить на три разряда, относя ихъ всѣ въ область «псевдо-алгебры». По общему правилу, напримѣръ, равныя величины, раздѣленныя на равныя, даютъ и равныя частныя. Но это правило теряетъ свою силу, если равные дѣлители являются въ видѣ нуля. Приложенiе общаго

правила къ этому специальному случаю даетъ также весьма большое число распространенныхъ математическихъ софизмовъ.

$$x^2 - x^2 = x^2 - x^2.$$

Первую часть его представимъ какъ произведенiе суммы на разность, а во второй вынесемъ общаго множителя; получимъ

$$(x + x)\ (x - x) = x\ (x - x). \dots\dots\dots (1)$$

Сокращая на $x - x$, получимъ:

$$x + x = x. \dots\dots\dots\dots\dots (2)$$

или

$$2x = x,$$

т. е.

$$2 = 1 \dots\dots\dots\dots\dots\dots (3)$$

Абсурдъ получился потому, что, дѣля на 0 тождество (1), мы обратили его въ ур-iе (2), которое удовлетворяется только корнемъ $x = 0$. Дѣля же (2) на x, мы и получаемъ *нелѣпость* (3).

Вотъ еще примѣръ:

Пусть

$$x = 1.$$

Тогда

$$x^2 = x.$$

И

$$x^2 - 1 = x - 1.$$

Дѣля на $x - 1$:

$$x + 1 = 1.$$

Но такъ какъ по положенiю $x = 1$, то, подставляя, получаемъ $2 = 1$.

Употребленiе расходящихся безконечныхъ рядовъ даетъ другiе многочисленные образцы математическихъ софизмовъ, секретъ которыхъ состоитъ въ томъ, что молчаливо принимается за вѣрное для всѣхъ рядовъ нѣчто такое, что̀ на самомъ дѣлѣ

вѣрно только для сходящагося ряда. Такъ называемый «гармоническій рядъ» употребляется съ этой цѣлью особенно часто.

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ \dots$$

Разобьемъ этотъ рядъ на группы членовъ такъ:

$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+$$

$$+\left(\frac{1}{9}+\ \dots \text{ всего 8 член.}\right)+\left(\frac{1}{17}+\ \dots \text{ всего 16 член.}\right)+\dots$$

Каждая заключенная въ скобки группа членовъ больше $\frac{1}{2}$.

Слѣдовательно, сумма n первыхъ членовъ ряда возрастаетъ безгранично при безграничномъ возрастаніи n. Итакъ, сумма членовъ ряда безконечна. Рядъ есть расходящійся. Но если въ этомъ ряду знаки $+$ и $-$ попеременно чередуются, то, какъ извѣстно, рядъ

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\ \dots.$$

есть сходящійся и сумма его равна $\log 2$ (логариѳмъ берется Неперовъ, т. е. при основаніи e). Запомнивъ это, не трудно будетъ разобраться въ такомъ «софизмѣ», гдѣ отправляются отъ этого ряда, выражающаго $\log 2$.

$$\log 2 = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\ \dots$$

$$=\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\ \dots\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\ \dots\right)=$$

$$\left[\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\dots\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\dots\right)\right]-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{6}+\dots\right)=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\dots\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\dots\right)=\mathbf{0}$$

Но $\log 1$ также $=0$, значитъ $\log 2=\log 1=0$.

Вмѣсто двухъ послѣднихъ скобокъ мы могли бы написать знаки безконечности ∞ и вычесть: $\infty - \infty = 0$.

Безконечность и 0 для творца математическихъ софизмовъ, вѣдь, тоже «количества»!...

Молчаливо допуская, что всякое дѣйствительное число имѣетъ логариѳмъ, и что онъ подчиняется тѣмъ же законамъ, что и логариѳмы обыкновенныхъ ариѳметическихъ чиселъ, можно создать новый типъ софизмовъ:

$$(-1)^2 = 1.$$

Такъ какъ логариѳмы равныхъ величинъ равны, то:

$$2\log(-1) = \log 1 = 0.$$

Итакъ $\log(-1) = 0$.

А также $\log(-1) = \log 1$.

Значитъ $-1 = 1$!..

Идея о софизмахъ этого послѣдняго типа была посѣяна знаменитымъ Иваномъ Бернулли.

Дадимъ еще и такой образецъ софизма:

Если взять дробь $\frac{1}{x}$, то она, какъ извѣстно, возрастаетъ съ уменьшеніемъ знаменателя.

Поэтому, такъ какъ рядъ 5, 3, 1, — 1, — 3, — 5 есть рядъ убывающій, то рядъ вида

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{5}, \frac{1}{3}, 1. -1, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{5} \text{ и т. д.}$$

есть возрастающій рядъ. Но въ возрастающемъ ряду каждый послѣдующій членъ больше предыдущаго,— значитъ:

$$\frac{1}{3} > \frac{1}{5}, 1 > \frac{1}{3}, -\mathbf{1} > \mathbf{1}, \text{ и т. д.}$$

Вотъ поистинѣ неожиданный результатъ! Выходитъ, что мы «доказали» будто

$$-\mathbf{1} > +\mathbf{1}!$$

Закончимъ настоящую главу общимъ замѣчаніемъ, что здравое и правильное разсужденіе, все же, не въ силахъ совершенно убить ни чисто формальныхъ, логическихъ, ни математическихъ софизмовъ. Таково ужъ свойство человѣческаго ума. Но что же изъ этого? Если существуетъ, напримѣръ, поддѣльная монета, то это вѣдь не значитъ, что подлинная не имѣетъ никакой цѣнности. Изученіе поддѣлки, наоборотъ, можетъ научить насъ въ будущемъ различать всякую фальшь, какъ бы тонко и хитро немъ ее ни преподносили. Разборъ всякаго рода фальши и логическихъ подтасовокъ въ такомъ случаѣ можетъ быть предметомъ не только пріятныхъ, но и полезныхъ развлеченій.

Задача 59-я.

Опровергнуть софизмъ:

Возьмемъ тождество

$$4-10+\frac{25}{4}=9-15+\frac{25}{4}$$

которое можно представить въ видѣ

$$\left(2-\frac{5}{2}\right)^2=\left(3-\frac{5}{2}\right)^2.$$

Извлекая изъ обѣихъ частей квадратный корень, имѣемъ

$$2-\frac{5}{2}=3-\frac{5}{2}.$$

Прибавляя къ обѣимъ частямъ по $\frac{5}{2}$, имѣемъ:

$$2=3.$$

Задача 60-я.

Опровергнуть софизмъ:

Очевидно, что

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2>\left(\frac{1}{2}\right)^3$$

Логариѳмируя обѣ части, получаемъ

$$2\lg\frac{1}{2}>3\lg\frac{1}{2}.$$

Дѣля обѣ части на одно и то же количество $\lg\frac{1}{2}$, получаемъ:

$$2 > 3.$$

Задача 61-я.

Дѣлежъ верблюдовъ.

Старикъ арабъ, имѣвшій трехъ сыновей, распорядился, чтобы они послѣ его смерти подѣлили принадлежащее ему стадо верблюдовъ такъ, чтобы старшій взялъ половину всѣхъ верблюдовъ, средній—треть и младшій—девятую часть всѣхъ верблюдовъ. Старикъ умеръ и оставилъ 17 верблюдовъ. Сыновья начали дѣлежъ, но оказалось, что число 17 не дѣлится ни на 2, ни на 3, ни на 9. Въ недоумѣніи, какъ быть, братья обратились къ шейху (старшина племени). Тотъ пріѣхалъ къ нимъ на собственномъ верблюдѣ и раздѣлилъ ихъ по завѣщанію. Какъ онъ это сдѣлалъ?

Рѣшеніе.

Шейхъ пустился на уловку. Онъ прибавилъ къ стаду на время своего верблюда, тогда стало 18 верблюдовъ. Раздѣливъ это число, какъ сказано въ завѣщаніи, шейхъ взялъ своего верблюда обратно; и получилось:

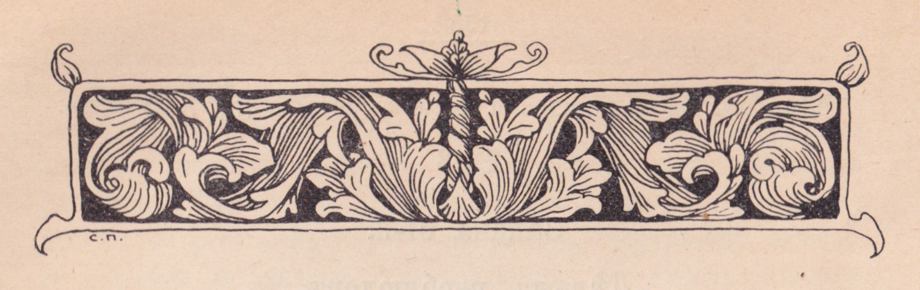
у старшаго брата $\frac{1}{2}$ . . . . . 9 верблюд.,

у средняго брата $\frac{1}{3}$ . . . . . 6 »

у младшаго брата $\frac{1}{9}$ . . . . . 2 »

Всего . . . 17 верблюд.

Замѣчаніе. Задача представляетъ родъ математическаго софизма. Слѣдуетъ замѣтить, что сумма $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}=\frac{17}{18}$, т. е. не равна единицѣ. Но отношеніе цѣлыхъ чиселъ 9, 6 и 2 равно отношенію дробей $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{9}$.



Положительныя и отрицательныя числа.

Говорить объ ариѳметическомъ числѣ, какъ о положительномъ,—до сихъ поръ еще составляетъ такое распространенное и общее заблужденіе, что всегда полезно вносить на этотъ счетъ соотвѣтствующія поправки. Числа, съ которыми мы оперируемъ въ ариѳметикѣ, нельзя назвать ни положительными, ни отрицательными. Это числа, если можно такъ выразиться, *не имѣющія знака*. Отрицательныя числа появились не позднѣе положительныхъ, какъ иные ошибочно говорятъ, смѣшивая двѣ разныхъ вещи; и тѣ и другія числа въ одно и то же время одинаково лежатъ въ понятіи какъ отдѣльной личности, такъ и народа вообще. На какомъ основаніи мы можемъ утверждать, говоря о двухъ прямо *противоположныхъ* вещахъ, что идея объ одной сдѣлалась принадлежностью человѣческаго ума раньше, чѣмъ идея о другой; или же говорить, что первое яснѣе, чѣмъ второе? Выраженія «положительный» и «отрицательный» соотносительны (коррелятивны), и ни одного изъ нихъ нельзя употребить, не вспомнивъ о другомъ.

Хорошимъ упражненіемъ для развитія яснаго пониманія тѣхъ соотношеній, которыя существуютъ между положительными, отрицательными и ариѳметическими числами, служитъ разсмотрѣніе соотвѣтствія между положительнымъ и отрицательнымъ рѣшеніемъ уравненія и ариѳметическимъ рѣшеніемъ задачи, давшей начало уравненію, въ связи съ вопросомъ, благодаря какимъ начальнымъ предположеніямъ получится это соотвѣтствіе.

Для нагляднаго выясненія соотношеній, существующихъ между положительнымъ, отрицательнымъ и ариѳметическимъ числомъ, быть можетъ, нѣтъ лучше прибора, чѣмъ вѣсы. Этотъ приборъ прежде всего наилучше выясняетъ ту прямую *противоположность*, которая существуетъ между положительнымъ и отрицательнымъ числомъ. Такъ, тяжесть, находящаяся, скажемъ на положительной чашкѣ вѣсовъ, уравновѣшиваетъ то напряженіе притяженія, которое оказываетъ равная по массѣ тяжесть, положенная на другую чашку вѣсовъ. Двѣ тяжести на противоположныхъ чашкахъ вѣсовъ имѣютъ равныя массы, равно какъ и два числа, выражающія эти тяжести, имѣютъ одинаковое ариѳметическое значеніе.

Несчастливое выраженіе «меньше, чѣмъ ничто» (пущенное въ оборотъ Штифелемъ), попытка разсматривать отрицательныя числа отдѣльно отъ положительныхъ, «изученіе» отрицательныхъ чиселъ позднѣе положительныхъ, а также названіе «фиктивныхъ», придававшееся прежде отрицательнымъ числамъ,—все это кажется теперь довольно страннымъ,—только теперь, послѣ того, какъ ясно усвоено истинное значеніе положительныхъ и отрицательныхъ чиселъ, какъ величинъ дѣйствительныхъ, хотя прямопротивоположныхъ по значенію. Такія поясненія, какъ числа дебета и кредита въ бухгалтеріи, или же показанія термометра выше и ниже нуля, также могутъ до нѣкоторой степени способствовать полнотѣ пониманія о противоположности положительныхъ и отрицательныхъ чиселъ.

Объ иллюстраціи положительныхъ и отрицательныхъ чиселъ съ помощью прямой линіи см. главу «Наглядное представленіе комплексныхъ чиселъ».

Здѣсь, пожалуй, кстати будетъ привести и небольшую историческую справку изъ Каэджори (*Cajori. History of Elementary Mathematics*) объ отрицательныхъ числахъ: «Отрицательныя числа казались «абсурдомъ» или «фикціей», пока математики не натолкнулись на ихъ наглядное или графическое представленіе... Впрочемъ, если изгнать всякое наглядное представленіе посредствомъ линій, или термометра, то отрицательныя числа и нынѣшнему учащемуся могли бы показаться такимъ же абсурдомъ, какимъ они казались прежнимъ алгебраистамъ».

Задача 62-я.

Два общихъ наибольшихъ дѣлителя.

Допустимъ, что дано два количества

$$x^3 - a^3 \text{ и } a^2 - x^2;$$

и затѣмъ на вопросъ объ ихъ О. Н. Д. (общемъ наибольшемъ дѣлителѣ) одинъ отвѣтилъ, что О. Н. Д. этихъ количествъ есть $x-a$, а другой, что такой дѣлитель есть $a-x$. Спрашивается: кто правъ?

Рѣшеніе.

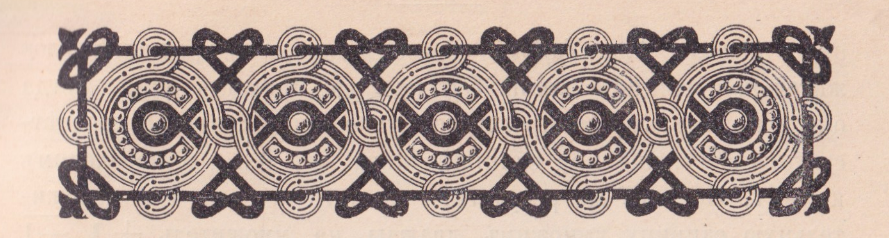
Оба отвѣта правильны. Слѣдуетъ только, чтобы отвѣчающій правильно понялъ и обсудилъ вопросъ, такъ какъ въ наличности *двухъ* О. Н. Д. нѣтъ ничего страннаго. Если бы количества были предложены въ формѣ x^3-a^3 и x^2-a^2, то отвѣчающій, естественно, сказалъ бы, что О. Н. Д. ихъ есть $x-a$, и, пожалуй, иной настаивалъ бы, что существуетъ только онъ одинъ. Но не трудно видѣть, что $a-x$ есть тоже общій дѣлитель и такого же порядка, какъ и $x-a$.

Быть можетъ,—замѣтимъ здѣсь кстати,—слѣдовало бы при изученіи элементарной алгебры обращать почаще вниманіе на то, что всякій рядъ алгебраическихъ выраженій можетъ имѣть *два общихъ наибольшихъ дѣлителя*, равныхъ по величинѣ, но противоположныхъ по знаку.

Такъ какъ слово «наибольшій» обозначаетъ превосходную степень, то математику въ данномъ случаѣ приходится извиняться предъ филологомъ за прегрѣшеніе противъ синтаксиса языка.

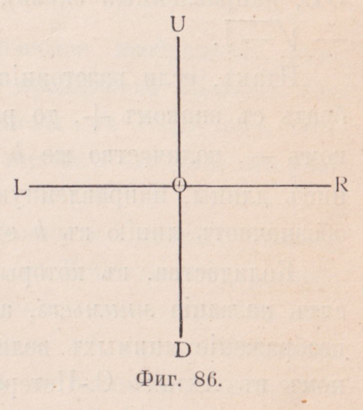
Въ самомъ дѣлѣ, какой солецизмъ!.. *Два наибольшихъ*...

Примѣчаніе. Все сказанное объ О. Н. Д. можно, очевидно, съ такимъ же основаніемъ отнести и къ общему наименьшему кратному. Такъ что съ алгебраической точки зрѣнія совершенно естественно говорить о *двухъ О. Н. К.*



Наглядное изображеніе комплексныхъ чиселъ.

Возьмемъ отрѣзокъ прямой OR длиной въ одну единицу, направленный вправо отъ O (фиг. 86) и примемъ его за $+1$; тогда -1 изображается отрѣзкомъ OL той же прямой, равнымъ OR, но направленнымъ влѣво отъ O. Вообще говоря, $+a$ изобразится линіей въ a единицъ длины, но направленной вправо отъ O, и $-a$ линіей же въ a единицъ длины, но направленной влѣво отъ O. Таково простѣйшее и наиболѣе извѣстное приложеніе прямой линіи, которое даетъ намъ геометрическое изображеніе такъ называемыхъ *дѣйствительныхъ* (положительныхъ и отрицательныхъ) чиселъ. Подобное приложеніе прямой для геометрическаго изображенія чиселъ разнаго знака было, какъ оказывается, извѣстно еще древнимъ индусамъ, но намъ неизвѣстны случаи подобнаго примѣненія въ Европѣ до 1629, когда въ сочиненіи «Invention Nouvelle en l'Algèbre» далъ его Альберъ Жираръ.



Фиг. 86.

Представимъ теперь себѣ, что направленная въ положительную сторону линія OR въ единицу длины вращается около O, какъ центра, въ направленіи, принятомъ за *положительное* (противоположно движенію часовой стрѣлки) и изъ положенія OR $(+1)$ приходитъ въ положеніе OL (-1), описавъ при этомъ

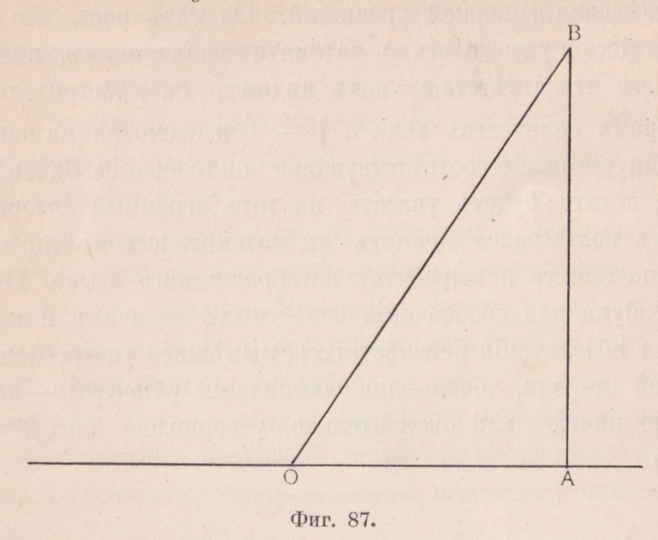
два прямыхъ угла. Такимъ образомъ круговому вращенію положительной единицы длины OR на два прямыхъ угла, когда она принимаетъ прямо-противоположное направленіе OL, соотвѣтствуетъ измѣненіе при единицѣ знака: отъ $+1$ мы переходимъ къ -1. Но тотъ же результатъ получится, если мы положительную единицу умножимъ дважды на множитель $+\sqrt{-1}$ (какъ извѣстно, $\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1}=-1$). Итакъ, круговому перемѣщенію прямой на каждый прямой уголъ соотвѣтствуетъ въ данномъ случаѣ множитель $\sqrt{-1}$. Слѣдовательно, когда линія OR приметъ направленіе OU (*вверхъ* и перпендикулярно къ OR), то она изобразится числомъ $+\sqrt{-1}$. Подобнымъ же образомъ, продолжая вращеніе прямой въ томъ же направленіи, мы видимъ, что изъ положенія OL (-1), она черезъ положеніе OD приходитъ опять въ положеніе OR $(+1)$, описавъ еще два прямыхъ угла. Аналитически то же получится, если мы -1 дважды умножимъ на $-\sqrt{-1}$; такъ что множитель $-\sqrt{-1}$ соотвѣтствуетъ вращенію OL на прямой уголъ къ положенію OD, и эту послѣднюю линію (перпендикуляръ къ OL, направленный *внизъ*), мы и должны обозначить числомъ $-\sqrt{-1}$.

Итакъ, если разстоянія, отсчитываемыя вправо, мы будемъ брать съ знакомъ $+$, то разстоянія влѣво должны быть со знакомъ $-$, количество же $b\sqrt{-1}$ обозначаетъ линію въ b единицъ длины, направленную *вверхъ*, а количество $-b\sqrt{-1}$ обозначаетъ линію въ b единицъ длины и направленную *внизъ*.

Количества, въ которыя входитъ множителемъ $\sqrt{-1}$, носятъ названіе *мнимыхъ*, а только что указанное геометрическое изображеніе мнимыхъ величинъ было впервые предложено Кюномъ въ Актахъ С.-Петербургской Академіи Наукъ за 1750 г.

Для графическаго изображенія *комплекснаго* числа, т. е. числа вида $a+b\sqrt{-1}$, отъ точки O (фиг. 87) откладываемъ въ положительномъ направленіи линію OA, равную a единицамъ длины; изъ A возставляемъ перпендикуляръ AB, равный b единицамъ длины и въ направленіи, указываемомъ множителемъ

$\sqrt{-1}$; наконецъ, проводимъ прямую OB. Эта послѣдняя линія по величинѣ и направленію и есть геометрическое изображеніе комплекснаго количества $a+b\sqrt{-1}$. Длина OB, равная $\sqrt{a^2+b^2}$, носитъ названіе *модуля* взятаго нами комплекснаго числа.



Фиг. 87.

Только что указанное геометрическое изображеніе комплексныхъ количествъ было впервые предложено Жаномъ Робертомъ Аргагомъ (Argand) изъ Женевы въ 1806 году. Онъ же первый въ 1814 г. употребилъ и терминъ «модуль» въ указанномъ выше смыслѣ.

Работы Кюна, Аргана и въ особенности датскаго ученаго Весселя (въ 1797 г. Академія Наукъ въ Копенгагенѣ), распространившаго представленіе комплексныхъ количествъ на геометрію въ пространствѣ, представляютъ тѣ подготовительныя ступени, основываясь на которыхъ въ настоящее время выросъ новый важный методъ: «теорія векторовъ» (векторіальный анализъ). Во всей полнотѣ и широтѣ вопросъ этотъ впервые охваченъ и обработанъ проф. Вильямомъ Гамильтономъ въ 1852 и 1866 годахъ подъ именемъ «*Кватерніоновъ*».

Вмѣсто символа $\sqrt{-1}$ обыкновенно употребляется буква i. Обозначеніе это впервые было предложено Эйлеромъ. Популяризацію же среди математиковъ какъ этого символа, такъ и

работъ Кюна и Аргана слѣдуетъ приписать «первому изъ математиковъ» К. Ф. Гауссу.

Столь противоположныя по смыслу названія, какъ «дѣйствительный» и «мнимый», были впервые употреблены Декартомъ при изслѣдованіи корней уравненій. Съ тѣхъ поръ это слово *мнимый* такъ и удержалось въ математическомъ языкѣ, несмотря на все его несоотвѣтствіе, какъ видимъ, съ дѣйствительнымъ характеромъ количествъ вида $a\sqrt{-1}$ и несмотря на попытки ввести другое болѣе соотвѣтствующее наименованіе. Здѣсь, быть можетъ, кстати будетъ указать на тотъ огромный авторитетъ, которымъ пользовался Декартъ въ математическомъ мірѣ даже въ обозначеніяхъ и выработкѣ алгебраическаго языка. Первыя буквы азбуки для обозначенія извѣстныхъ величинъ и послѣднія—для обозначенія неизвѣстныхъ, нынѣшнее употребленіе показателей степени, точка—для обозначенія умноженія—все это получило начало или окончательно утвердилось авторитетомъ Декарта.

Исторія науки и въ данномъ случаѣ подверждаетъ правило, что каждое новое *обобщеніе* вопроса заключаетъ въ себѣ, какъ частные случаи, все то, что прежде было извѣстно объ этомъ предметѣ. Общая форма комплекснаго количества

$$a + bi$$

заключаетъ въ себѣ, какъ частные случаи, и «дѣйствительныя», и «мнимыя» количества. При $b = 0$ комплексъ $a + bi$ даетъ дѣйствительную величину, при $a = 0$ получается мнимая. Общая форма комплекснаго числа есть сумма дѣйствительнаго и мнимаго.

Въ 1799 году Гауссъ обнародовалъ первое изъ своихъ 3-хъ доказательствъ, что всякое алгебраическое уравненіе имѣетъ корень вида $a + bi$.

Уравненія первой степени (линейныя) даютъ намъ возможность разсматривать только дѣйствительныя количества противоположныхъ знаковъ: $x + a = 0$ и $x - a = 0$ удовлетворяются соотвѣтственно значеніями $-a$ и $+a$. Неполное квадратное ур-іе вида $x^2 + a^2 = 0$ и $x^2 - a^2 = 0$ уже вводитъ въ разсмотрѣ-

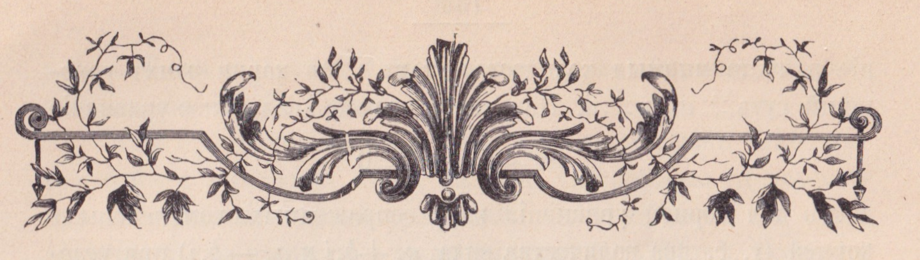
нiе и чисто мнимыя количества, такъ какъ корни этихъ уравненiй суть $\pm ai$ и $\pm a$. Наконецъ, полное квадратное уравненiе

$$ax + bx + c = 0$$

даетъ для корней уравненiя пару сопряженныхъ комплексныхъ корней (т. е. два количества вида: $a_1 + b_1 i$ и $a_1 - b_1 i$) при условiи, что b не равно нулю, и что выраженiе $b^2 - 4ac$ отрицательно. Послѣднее выраженiе, составленное изъ коэффицiентовъ даннаго уравненiя ($b^2 - 4ac$), носитъ спецiальное названiе *дискриминанта* ур-iя.

Какъ видимъ, знакомство съ мнимыми и комплексными количествами является непосредственнымъ результатомъ простого алгебраическаго анализа. Но полное пониманiе и надлежащая оцѣнка этихъ количествъ были невозможны до тѣхъ поръ, пока не сдѣлалось возможнымъ наглядное и, такъ сказать, ощутимое изученiе ихъ. Исторiя вопроса постоянно показываетъ намъ, что въ изученiе алгебры вводилось постепенно графическое изображенiе положительныхъ, отрицательныхъ, мнимыхъ и комплексныхъ чиселъ.

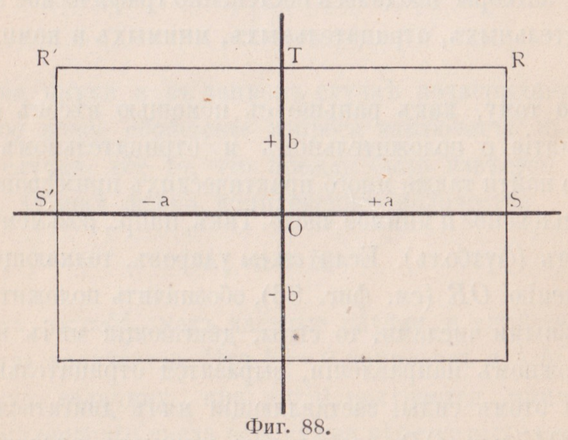
Подобно тому, какъ раньше съ помощью вѣсовъ было выяснено понятiе о положительномъ и отрицательномъ количествѣ, можно найти также много практическихъ примѣровъ, уясняющихъ комплексное и мнимое число. Такъ, напр., возьмемъ игру въ ножной мячъ (футболъ). Если *силы* ударовъ, толкающихъ мячъ по направленiю OR (см. фиг. 86), обозначить положительными, дѣйствительными числами, то силы, двигающiя мячъ въ прямо-противоположномъ направленiи, выразятся отрицательными числами. При этомъ силы, заставляющiя мячъ двигаться въ направленiи OU или OD, изобразятся мнимымъ числомъ, а всякая сила, двигающая мячъ въ любую иную сторону площади игры, изобразится комплекснымъ числомъ.



Правило знаковъ при алгебраическомъ умноженіи.

Геометрическое объясненіе.

Разстояніе направо и вверхъ отъ O (фиг. 88) условимся брать со знакомъ $+$, а разстояніе налѣво и внизъ условимся брать со знакомъ $-$. Выполнимъ прилагаемый здѣсь чертежъ (фиг. 88) и разсмотримъ полученные прямоугольники.



Фиг. 88.

Прямоугольникъ OR имѣетъ $a \cdot b$ единицъ площади. *Примемъ*, что это произведеніе имѣетъ знакъ $+$.

Предположимъ теперь, что SR, оставаясь параллельной самой себѣ, передвинется влѣво и, перейдя черезъ положеніе OT, передвинется еще лѣвѣе на a единицъ и приметъ положеніе $S'R'$. Основаніе прямоугольника при этомъ будетъ все уменьшаться, обратится въ нуль и, перейдя черезъ это значеніе, станетъ отрицательнымъ. Точно также сдѣлается отрицательнымъ и

прямоугольникъ. Значитъ произведеніе $-a$ на $+b$ станетъ отрицательнымъ, оно $=-ab$.

Предположимъ далѣе, что TR' передвигается внизъ, оставаясь параллельной самой себѣ, и опустится на b единицъ ниже линіи SS''. Прямоугольникъ, раньше отрицательный (со знакомъ —), перейдетъ значеніе черезъ 0 и станетъ теперь положительнымъ. Итакъ, произведеніе $-a$ на $-b$ даетъ $+ab$.

Путемъ подобнаго же разсужденія не трудно видѣть, что $(+a)(-b)=-ab$.

На основаніи опредѣленія умноженія.

Умноженіе есть дѣйствіе, при которомъ изъ одного изъ двухъ данныхъ чиселъ (множимое) мы получаемъ новое число (произведеніе) такъ, какъ другое число (множитель) получается изъ единицы, принятой за *основную*.

Предположимъ, что даны 2 множителя: $+4$ и $+3$. *Принимая* за основную единицу $+1$, мы видимъ, что множитель составленъ повтореніемъ три раза этой основной единицы: $(+1)+(+1)+(+1)=+3$. По опредѣленію умноженія, то же самое надо произвести и съ множимымъ: $(+4)+(+4)+(+4)=$ $=+12$, т. е. произведеніе получится положительное. Разсуждая совершенно подобнымъ же образомъ, найдемъ, что произведеніе -4 на $+3=(-4)+(-4)+(-4)=-12$.

Возьмемъ теперь множители $+4$ и -3. Множитель -3 получается опять-таки троекратнымъ сложеніемъ основной единицы, но *съ измѣненнымъ знакомъ*. Поэтому, чтобы получить произведеніе $+4$ на -3, мы должны также взять множимое $+4$ съ *измѣненнымъ знакомъ* и сложить его 3 раза. Получится $(-4)+(-4)+(-4)=-12$.

Точно также при умноженіи -4 на -3, мы во множимомъ должны перемѣнить знакъ на обратный и сложить его 3 раза, т. е. $(-4)\times(-3)=(+4)+(+4)+(+4)=+12$.

Такимъ образомъ для всѣхъ четырехъ случаевъ мы геометрически и аналитически вывели то извѣстное правило знаковъ, которое часто для краткости выражаютъ такъ: «одинаковые знаки даютъ +, а разные —».

Обобщеніе правила знаковъ.

Выводя предыдущее правило знаковъ при умноженіи, мы приняли за основную единицу $+1$. Посмотримъ, что произойдетъ, если за основную единицу примемъ -1. Исходя изъ опредѣленія умноженія и разсуждая совершенно такъ же, какъ въ предыдущей главѣ, найдемъ, что въ *этомъ* случаѣ получается:

$$(+4)\times(+3)=-12$$
$$(-4)\times(+3)=+12$$
$$(+4)\times(-3)=+12$$
$$(-4)\times(-3)=-12.$$

Разсматривая *эти* четыре случая, мы видимъ, что при основной единицѣ -1 правило знаковъ будетъ уже не то, что при основной единицѣ $+1$, а именно: въ этомъ случаѣ при одинаковыхъ знакахъ множителей получается $-$, а при разныхъ знакахъ множителей получается $+$.

То же самое мы могли бы получить и геометрически, но только тогда на фиг. 88-ой прямоугольникъ $(+a)\times(+b)$ надо принять отрицательнымъ, т. е. равнымъ $-ab$.

Но примемъ ли мы за основную единицу $+1$, или -1, оба правила знаковъ, выведенныя выше, можно объединить въ въ одно слѣдующее: *Если два множителя имѣютъ одинаковые знаки, то знакъ ихъ произведенія одинаковъ со знакомъ основной единицы; если же оба множителя имѣютъ разные знаки, то знакъ ихъ произведенія противоположенъ знаку основной единицы.* Или, выражаясь кратко, одинаковые знаки даютъ знакъ одинаковый (съ основной единицей), а разные—противоположный (основной единицѣ).

Если принять за основную еще какую либо иную единицу, то получимъ и другіе законы для знаковъ — другую алгебру, иначе говоря

Умноженіе, какъ пропорція.

По опредѣленію умноженія, произведеніе находится въ такомъ же отношеніи къ множимому, въ какомъ множитель находится къ основной единицѣ. Это равенство отношеній можно представить пропорціей:

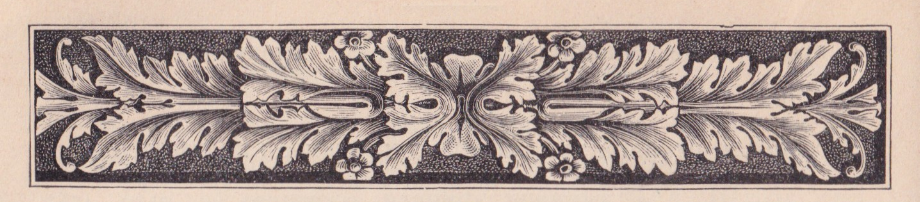
произведеніе : множимое = множитель : основная единица.

Или:

основная единица : множитель = множимое : произведеніе.

Постепенное обобщеніе умноженія.

Съ тѣхъ поръ, какъ Лука Пачіоли (въ XV и въ началѣ XVI столѣтія) находилъ, что необходимо (хотя и трудно) объяснять, почему это при перемноженіи правильныхъ дробей (въ ариѳметикѣ) получается произведеніе меньшее, чѣмъ множимое, и до нашихъ дней съ современнымъ употребленіемъ термина «*умноженіе*» въ высшей математикѣ, какъ видимъ, произошла большая перемѣна. Такъ что этотъ математическій терминъ «умноженіе» можетъ служить однимъ изъ лучшихъ примѣровъ обобщенія и употребленія слова совсѣмъ уже не въ томъ этимологическомъ смыслѣ, который оно имѣло вначалѣ.



Геометрическіе софизмы.

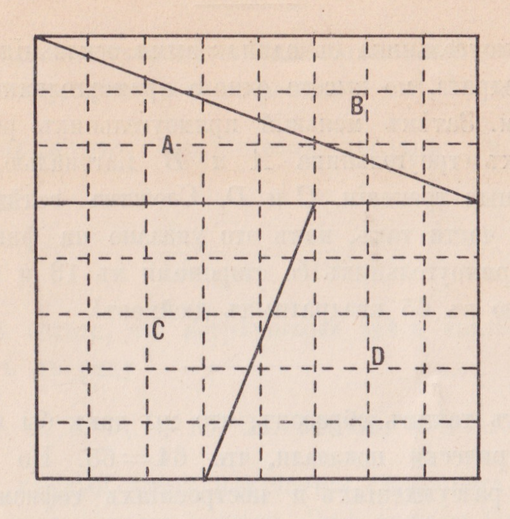
Задача 63-я.

Искусная починка.

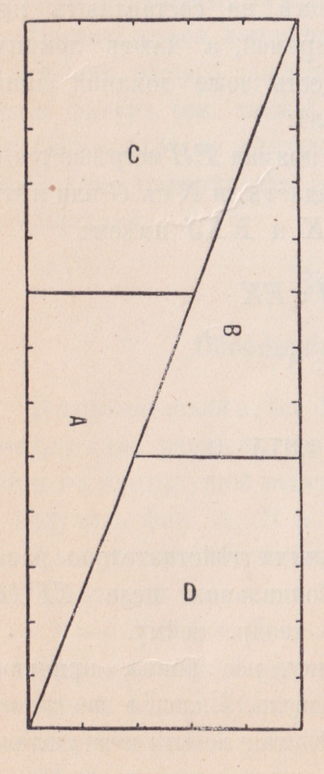
На днѣ деревяннаго судна во время плаванія случилась прямоугольная пробоина въ 13 дюймовъ длины и 5 дюймовъ ширины, т. е. площадь пробоины оказалась равной $13 \times 5 = 65$ квадратнымъ дюймамъ. У судового же плотника для починки нашлась только одна квадратная доска со стороной квадрата въ 8 дюймовъ. т. е. вся площадь квадрата равнялась $8 \times 8 = 64$ квадр. дюймамъ (фиг. 89). Плотникъ ухитрился, однако, разрѣзать квадратъ на части и сложить эти части такъ, что получился какъ разъ прямоугольникъ, соотвѣтствующій пробоинѣ, которую онъ и задѣлалъ. Вышло такимъ образомъ, что плотникъ владѣлъ секретомъ квадратъ въ 64 квадратныхъ единицъ мѣры обращать въ прямоугольникъ съ площадью въ 65 такихъ же квадратныхъ единицъ. Какъ это могло случиться?

Рѣшеніе.

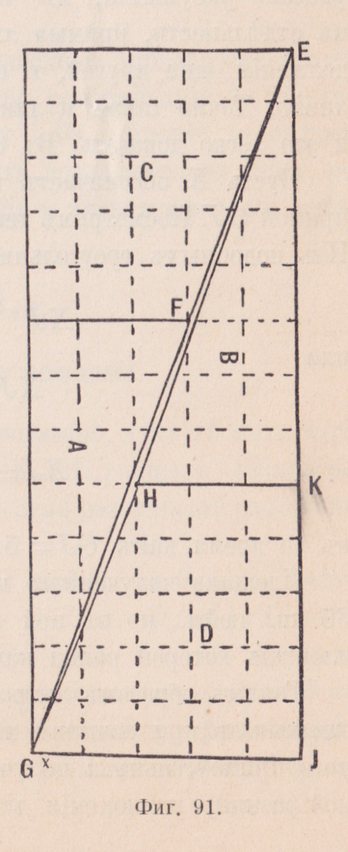
Квадратъ площадью въ 64 квадратныхъ дюйма разрѣжемъ на четыре части *A*, *B*, *C* и *D* такъ, какъ это указано сплошными линіями на фиг. 89. Т. е. сначала разрѣжемъ квадратъ



Фиг. 89.



Фиг. 90.



Фиг. 91.

на два прямоугольника съ одинаковыми основаніями, равными сторонѣ квадрата, но высота одного прямоугольника 3, а другого 5 дюйм. Затѣмъ меньшій прямоугольникъ раздѣлимъ на два равныхъ треугольника A и B діагональю, а бо̀льшій на двѣ равныя трапеціи, C и D. Сложимъ вслѣдъ за этимъ полученныя части такъ, какъ это указано на фиг. 90, и мы получимъ прямоугольникъ со сторонами въ 13 и 5 дюймовъ и съ площадью въ 65 квадратныхъ дюймовъ!

Выходитъ такимъ образомъ, что мы какъ бы и въ самомъ дѣлѣ геометрически показали, что $64 = 65$. Но допущенный въ нашихъ разсужденіяхъ и построеніяхъ софизмъ легко поясняется фиг. 91-й. Сложивъ полученныя части квадрата, какъ указано рисунками, мы получаемъ, что EH и HG, каждая въ отдѣльности, прямыя линіи, но онѣ не составляютъ продолженія одна другой, т. е. одной прямой, а даютъ ломаную линію. Точно также и линія EFG есть тоже ломаная линія; и это легко доказать. Въ самомъ дѣлѣ:

Пусть X обозначаетъ точку, гдѣ прямая EH встрѣчается съ прямой GJ. Посмотримъ теперь, совпадаетъ ли X съ G или нѣтъ? Изъ подобныхъ треугольниковъ EHK и EXJ имѣемъ

$$XJ : HK = EJ : EK$$

или

$$XJ : 3 = 13 : 8$$

т. е.

$$XJ = \frac{3 \cdot 13}{8} = 4{,}875$$

въ то время какъ $GJ = 5$.

Площадь полученнаго прямоугольника дѣйствительно равна 65 кв. дюйм., но въ ней есть ромбоидальная щель $EFGH$, площадь которой равна какъ разъ 1 квадр. дюйму.

Такимъ образомъ хитрому плотнику, все равно, пришлось замазывать при починкѣ небольшую щель. Иллюзія же сплошного прямоугольника получается вслѣдствіе весьма незначительной разницы наклоненія діагонали прямоугольника со сторонами

13 и 5 къ бо́льшей сторонѣ и наклоненія къ бо́льшей сторонѣ діагонали прямоугольника со сторонами 3 и 8. Въ самомъ дѣлѣ, наклоненія выражаются соотвѣтственно числами $\frac{5}{13}$ и $\frac{3}{8}$, разность которыхъ есть:

$$\frac{5}{13}-\frac{3}{8}=\frac{1}{104}.$$

Замѣтимъ кстати, что встрѣчаемыя здѣсь числа 3, 5, 8, 13 принадлежатъ къ ряду

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89,. . . . . . .,

въ которомъ каждый членъ получается сложеніемъ двухъ непосредственно предыдущихъ членовъ. Этотъ весьма замѣчательный рядъ былъ впервые указанъ въ XIII вѣкѣ математикомъ Леонардомъ Фибоначчи изъ Пизы.

Воспользуемся даннымъ геометрическимъ парадоксомъ также и для того общаго замѣчанія, что при разрѣзываніи и переложеніи фигуръ (см. также 1-ю книгу «Въ царствѣ смекалки» стр. 108—115) не слѣдуетъ довѣрять исключительно глазу, но необходимо подкрѣплять свои дѣйствія и математическими доказательствами.

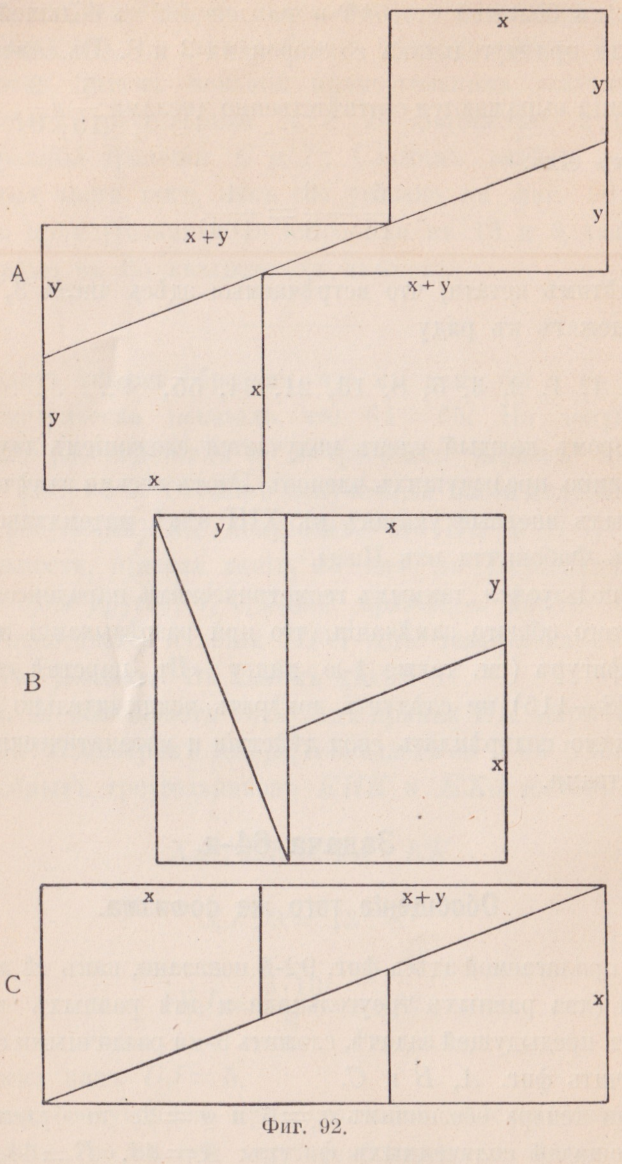
Задача 64-я.

Обобщеніе того же софизма.

На прилагаемой здѣсь фиг. 92-й показано, какъ тѣ же четыре фигуры (два равныхъ треугольника и двѣ равныхъ трапеціи), что и въ предыдущей задачѣ, сложить 3-мя различными способами и получить фиг. A, B и C.

Если теперь обозначимъ $x=5$ и $y=3$, то будемъ имѣть для площадей полученныхъ фигуръ: $A=63$, $B=64$, $C=65$, т. е. $C-B=1$ и $B-A=1$.

Словомъ, теперь уже выходитъ, что будто бы одни и тѣ же извѣстной формы куски, скажемъ, бумаги даютъ три площади различной величины, въ зависимости отъ одного только переложенія!



Фиг. 92.

Изслѣдуемъ полученныя три фигуры алгебраически:

площадь $A = 2xy + 2xy + y(2y - x) = 3xy + 2y^2$,

» $B = (x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$;

» $C = x(2x + y) = 2x^2 + xy$;

» $C - B = x^2 - xy - y^2$;

» $B - A = x^2 - xy - y^2$.

Итакъ, всѣ эти три фигуры будутъ равны, если $x^2 - xy - y^2 = 0$, т. е., иначе говоря, если

$$\frac{x}{y} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Слѣдовательно, взятыя нами 3 фигуры *не могутъ быть равны*, если x и y выражены оба въ раціональныхъ числахъ. Фиг. A и C кажутся намъ сплошными, опять таки, только вслѣдствіе зрительной иллюзіи.

Попытаемся теперь найти тѣ раціональныя значенія x и y, которыя разницу между A и B, или между B и C дѣлаютъ равной 1. Иначе говоря, надо рѣшить ур-іе

$$x^2 - xy - y^2 = \pm 1.$$

Искомыя рѣшенія, какъ оказывается, заключаются въ упомянутомъ въ предыдущей главѣ рядѣ Фибоначчи

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ... ,

если для y и x соотвѣтственно брать въ этомъ ряду два послѣдовательныхъ члена.

Значенія $y = 3$, $x = 5$ суть тѣ, которыя обыкновенно даются, какъ и въ настоящемъ случаѣ. Для нихъ мы и имѣемъ, какъ указано выше, $A < B < C$.

Если взять слѣдующую пару рѣшеній $y = 5$ и $x = 8$, то получится $A > B > C$, ибо въ этомъ случаѣ $A = 170$, $B = 169$, $C = 168$.

Рядъ Фибоначчи.

Какъ видимъ изъ двухъ предшествующихъ задачъ, рядъ Фибоначчи

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ... ,

гдѣ каждый послѣдующій членъ получается путемъ сложенія двухъ непосредственно предыдущихъ, играетъ значительную роль въ изслѣдованіи геометрическихъ софизмовъ разсматриваемаго рода. Укажемъ еще на нѣкоторыя свойства этого замѣчательнаго ряда.

Прежде всего обратимъ вниманіе на то, что квадратъ каждаго члена этого ряда, уменьшенный на произведеніе двухъ рядомъ о-бокъ (справа и слѣва) стоящихъ возлѣ него членовъ даетъ поперемѣнно то $+1$, то -1, т. е.

$$2^2 - 1 \, . \, 3 = +1,$$
$$3^2 - 2 \, . \, 5 = -1,$$
$$5^2 - 3 \, . \, 8 = +1,$$
$$8^2 - 5 \, . \, 13 = -1.$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Выдѣляя члены, дающіе -1, начиная съ

$$8^2 - 5 \, . \, 13 = -1,$$
$$21^2 - 13 \, . \, 34 = -1,$$
$$55^2 - 34 \, . \, 89 = -1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

мы видимъ, что парадоксы, приведенные нами выше, можно разнообразить сколько угодно. Такъ, вмѣсто квадрата на стр. 169 въ 8 единицъ длины можно брать квадраты со сторонами 21, 55 и т. д. единицъ длины и получать изъ нихъ парадоксальныя фигуры съ еще большимъ на первый взглядъ приближеніемъ.

Точно также, если взять въ ряду Фибоначчи такіе члены, что

$$13^2 - 8 \, . \, 21 = +1,$$
$$34^2 - 21 \, . \, 55 = +1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

то можно брать квадраты со сторонами въ 13, 34 и т. д. единицъ длины. Но здѣсь для достиженія требуемой иллюзіи лучше взять сначала прямоугольникъ (напр., со сторонами 8 и 21), а затѣмъ разрѣзать его такъ, чтобы скрываемая нами щель получалась внутри квадрата (13×13).

Замѣтимъ также, что если взять простѣйшую *непрерывную* дробь

$$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ldots}}}$$

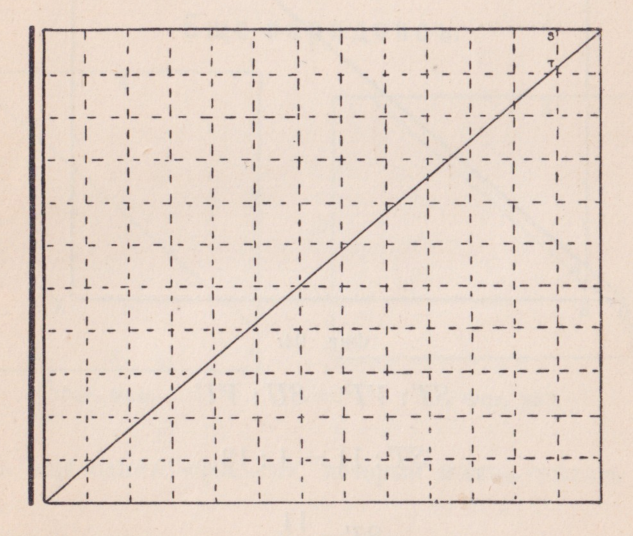
и начать вычислять ея послѣдовательныя *подходящія*, то опять получимъ рядъ Фибоначчи.

Итакъ разрѣзываніе и переложеніе фигуръ, подобныя указаннымъ выше, можно разсматривать, какъ геометрическое представленіе величины приближенія, даваемаго этой непрерывной дробью.

Задача 65-я.

Похоже, но не то.

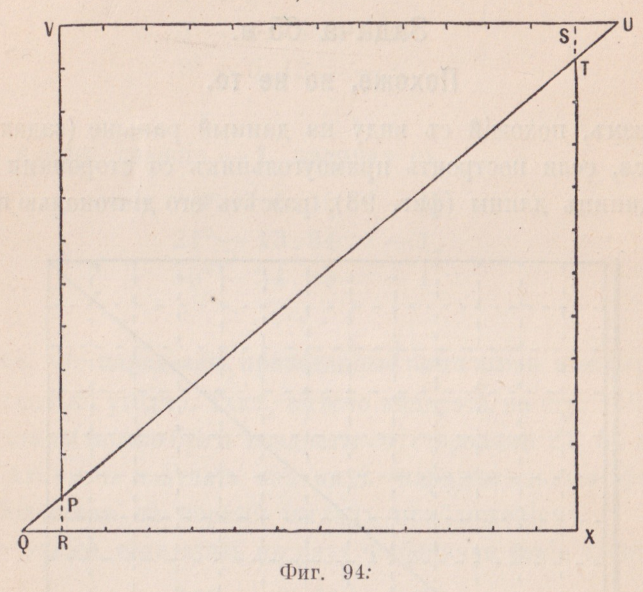
Софизмъ, похожій съ виду на данный раньше (задача 63), получится, если построить прямоугольникъ со сторонами въ 13 и 11 единицъ длины (фиг. 93), разсѣчь его діагональю и сдви-



Фиг. 93.

нуть затѣмъ полученные треугольники по ихъ общей гипотенузѣ въ положеніе, указанное на фиг. 94-ой. Эта послѣдняя фигура по виду состоитъ изъ квадрата *VRXS* со сторонами въ 12 единицъ длины, т. е. площадью въ $12^2 = 144$ квадр. единицъ. Кромѣ того къ этой площади надо прибавить площади треугольничковъ *PQR* и *STU*, каждая величиной въ 0,5 квадр. единицъ. Слѣдовательно, площадь всей фиг. 94 равна 145 квадр. единицамъ. Но какъ же это получилось, если площадь прямоугольника на фиг. 93 равна только $13 \times 11 = 143$ квадр. единицамъ?

Разсмотрѣніе фигуръ, особенно если обратимъ вниманіе на то, какъ діагональ на фиг. 93-ой пересѣкаетъ линіи, докажетъ намъ, что $VRXS$ не есть квадратъ. VS равна 12 единицамъ длины, но $SX < 12$; TX (меньшая сторона на фиг. 94) равна 11 един., но $ST < 1$ (см. ST на фиг. 94). Съ другой стороны, разбирая то же аналитически, имѣемъ:



Фиг. 94.

$$ST : VP = SU : VU$$

или

$$ST : 11 = 1 : 13,$$

т. е.

$$ST = \frac{11}{13}.$$

Значитъ, прямоугольникъ

$$VRXS = 12 \times 11\frac{11}{13} = 142\frac{2}{13}$$

$$\triangle PQR = \triangle STU = \frac{1}{2} \cdot \frac{11}{13} \cdot 1 = \frac{11}{26};$$

Слѣдовательно:

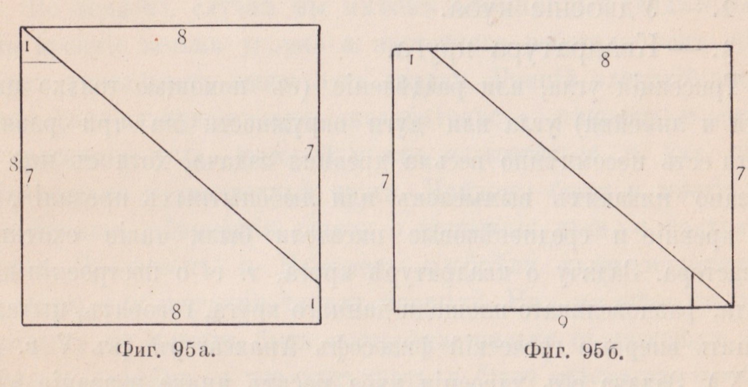
Фигура 94-я = прямоугольнику + 2 треугольника

$$= 142\frac{2}{13} + \frac{11}{13} = 143.$$

Если бы мы треугольники по той же діагонали сдвинули (до первой перекрестной линіи) съ мѣста въ направленіи, противоположномъ тому, какое указано фиг. 94, то получили бы съ виду прямоугольникъ 14×10 и два треугольника съ площадью въ $\frac{1}{2}$ каждый, т. е. выходило бы, что полученная фигура имѣетъ будто бы площадь 141 квадр. един., т. е. меньшую, чѣмъ площадь прямоугольника, изображеннаго фиг. 93. Разобрать и доказать ошибочность этого заключенія такъ же легко, какъ и въ только что разсмотрѣнномъ случаѣ.

Задача 66-я.

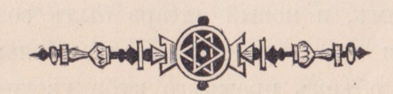
Еще парадоксъ.

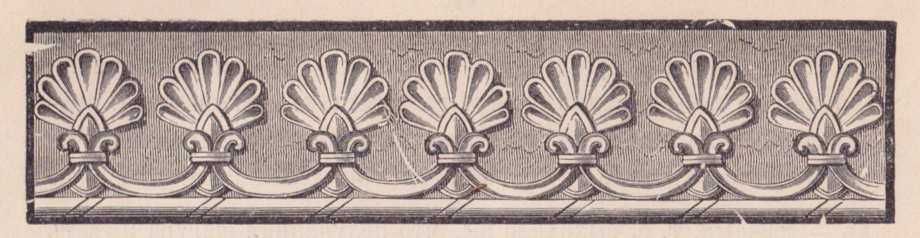


Фиг. 95а. Фиг. 95б.

Вотъ еще одинъ «фокусъ», который можно сдѣлать съ квадратомъ.

Возьмемъ квадратъ со стороной въ 8 единицъ длины и, слѣдовательно, съ площадью въ 64 квадр. един. Разрѣжемъ его, какъ указано на фиг. 95**а**, и переложимъ части такъ, какъ указано на фиг. 95**б**. Получается, повидимому, прямоугольникъ съ площадью $7 \times 9 = 63$, и это ничего не отбрасывая отъ площади квадрата, равной 64 квадр. единицамъ.





Три знаменитыхъ задачи древности.

Эти задачи слѣдующія:

1. — Трисекція угла или дуги.
2. — Удвоеніе куба.
3. — Квадратура круга.

Трисекція угла, или раздѣленіе (съ помощью только циркуля и линейки) угла или дуги окружности на три равныя части есть несомнѣнно весьма древняя задача, хотя съ ней не связано никакихъ вымысловъ или любопытныхъ преданій, на что древніе и средневѣковые писатели были такіе охотники и мастера. Задачу о квадратурѣ круга, т. е. о построеніи квадрата, равновеликаго площади даннаго круга, говорятъ, пытался рѣшить впервые греческій философъ Анаксагоръ (въ V в. до Р. Х.). Задача объ удвоеніи куба носитъ иначе названіе «Делійской задачи», такъ какъ съ ней связана легенда о томъ, что древніе совѣтовались будто бы относительно рѣшенія ея съ прославленнымъ Платономъ.

Преданіе, передаваемое нѣкіимъ Филопономъ, говоритъ, что въ 430 году до Р. Х. въ Аѳинахъ разразилась моровая язва. Аѳиняне послали къ оракулу на островѣ Делосѣ вопросить, какъ остановить это бѣдствіе. Аполлонъ отвѣтилъ, будто бы, что они должны удвоить величину его жертвенника, который имѣлъ форму куба. Невѣжественнымъ просителямъ дѣло казалось очень легкимъ, и новый алтарь былъ воздвигнутъ, — или такъ, что каждая его сторона была вдвое больше стороны прежняго куба (т. е. объемъ прежняго куба увеличили въ 8 разъ), или же еще проще, — помѣстивъ на старый алтарь еще новый

такой же величины. Эпидемія, однако, не прекращалась, и къ оракулу было снаряжено новое посольство, которое и узнало, что предписаніе Аполлона не было выполнено. Требовалось, чтобы новый алтарь имѣлъ также форму куба и имѣлъ *ровно вдвое большій объемъ*, чѣмъ старый жертвенникъ. Подозрѣвая тайну, Аѳиняне обратились за разгадкой ея къ Платону, который отослалъ ихъ къ геометрамъ и въ частности—къ Евклиду, который, будто бы, спеціально занимался этой задачей. Несмотря на всю заманчивость и нѣкоторое правдоподобіе этой исторіи (оракулы любили говорить загадками), приходится цѣликомъ отбросить ее, хотя бы потому, что Платонъ до 429 г. до Р. Х. еще и не родился, а знаменитый Евклидъ появляется не менѣе вѣка спустя.

Во всякомъ случаѣ мы имѣемъ несомнѣнныя свидѣтельства, что древніе весьма упорно и настойчиво работали надъ рѣшеніемъ указанныхъ выше 3-хъ задачъ. Гиппій элидскій нашелъ даже спеціальную кривую «квадратриксу», рѣшающую вопросъ о трисекціи угла, которой можно пользоваться и для рѣшенія вопроса о квадратурѣ круга. Найдены были и многія другія кривыя, рѣшающія задачу о трисекціи угла и квадратурѣ круга. Эратосѳенъ и Никомедъ изобрѣли даже механическіе приборы для черченія такихъ кривыхъ. Но... *ни одна* изъ этихъ кривыхъ не можетъ быть построена *только* съ помощью *циркуля* и *линейки*, а это какъ разъ и было *главнымъ требованіемъ* при рѣшеніи задачи.

Древность такъ и завѣщала рѣшеніе всѣхъ этихъ трехъ задачъ нашимъ временамъ. Нынѣшніе математики, вооруженные болѣе могущественными методами изслѣдованія, доказали, что всѣ три задачи невозможно рѣшить построеніемъ съ помощью *только* циркуля и линейки, какъ эти приборы употребляются и понимаются въ элементарной геометріи (см. по этому поводу слѣдующую главу). Подобное разрѣшеніе вопроса даже самые сильные математическіе умы древности могли только подозрѣвать, такъ какъ доказать невозможность рѣшенія при тогдашнихъ средствахъ математики они не могли. Но, доказавъ невозможность рѣшенія этихъ задачъ съ помощью *только* циркуля и линейки, математики нашихъ временъ дали новые спо-

собы и проложили новые пути къ рѣшенію этихъ задачъ, если отбросить ограниченіе о циркулѣ и линейкѣ. Былъ также изобрѣтенъ и примѣненъ методъ приближеній, который и *рѣшилъ* задачу, если можно здѣсь примѣнить это слово.

Что касается въ частности числа π (выражающаго отношеніе окружности къ діаметру), то только въ 1882 году Линдеманну удалось окончательно установить его *трансцендентальный* характеръ, т. е., что это число не можетъ быть корнемъ алгебраическаго уравненія. Замѣтимъ здѣсь кстати, что это знакомое каждому ученику старшихъ классовъ число π играетъ большую роль въ областяхъ математики, довольно удаленныхъ отъ такъ называемой «элементарной геометріи», напр., π довольно часто встрѣчается въ формулахъ теоріи вѣроятностей.

Приближенное значеніе для π (= 3,1 415 926 . . .) было между прочимъ вычислено съ **707** десятичными знаками математикомъ В. Шенксомъ. Этотъ результатъ вмѣстѣ съ формулой вычисленій онъ обнародовалъ въ 1873 г. Ни одна еще задача подобнаго рода не рѣшалась съ такимъ огромнымъ приближеніемъ и съ точностью, далеко превышающей отношеніе микроскопическихъ разстояній къ телескопическимъ.

Шенксъ вычислялъ. Слѣдовательно, онъ стоялъ въ противорѣчіи съ требованіями задачи о квадратурѣ круга, гдѣ требуется найти *рѣшеніе* построеніемъ. Работа Шенкса, въ сущности безполезна, или — почти безполезна. Но, съ другой стороны, она можетъ служить довольно убѣдительнымъ доказательствомъ противнаго для того, кто, не убѣдившись доказательствами Линдеманна и др. или не зная о нихъ, до сихъ поръ еще надѣется, что можно найти точное отношеніе окружности къ діаметру.

Квадратура круга была въ прежнія времена самой заманчивой и соблазнительной задачей. Армія «квадратурщиковъ» неустанно пополнялась каждымъ новымъ поколѣніемъ математиковъ. Всѣ усилія были тщетны, но число ихъ не уменьшалось. Въ нѣкоторыхъ умахъ доказательство, что рѣшеніе не можетъ быть найдено, зажигало еще большее рвеніе къ изысканіямъ. Что эта задача еще до сихъ поръ не потеряла своего

интереса, лучшимъ доказательствомъ служитъ появленіе до сихъ поръ попытокъ ее рѣшить.

Итакъ, всѣ старанія рѣшить три знаменитыя задачи при извѣстныхъ ограничивающихъ условіяхъ (циркуль и линейка) привели только къ доказательству, что подобное рѣшеніе невозможно. Иной, пожалуй, по этому поводу скажетъ, что, слѣдовательно, работа сотенъ умовъ, пытавшихся въ теченіе столѣтій рѣшить задачу, свелась, слѣдовательно, ни къ чему... Но это будетъ невѣрно. При попыткахъ рѣшить эти задачи было сдѣлано огромное число открытій, имѣющихъ гораздо большій интересъ и значеніе, чѣмъ сами поставленныя задачи. Попытка Колумба открыть новый путь въ Индію, плывя все на западъ, окончилась, какъ извѣстно, неудачей. И теперь мы знаемъ, что такъ *необходимо* и должно было случиться. Но геніальная попытка великаго человѣка привела къ «попутному» открытію цѣлой новой части свѣта, предъ богатствомъ и умственнымъ развитіемъ котораго блѣднѣютъ нынче всѣ сокровища Индіи.

Задача 67-я.

Линейка и циркуль. Трисекція угла.

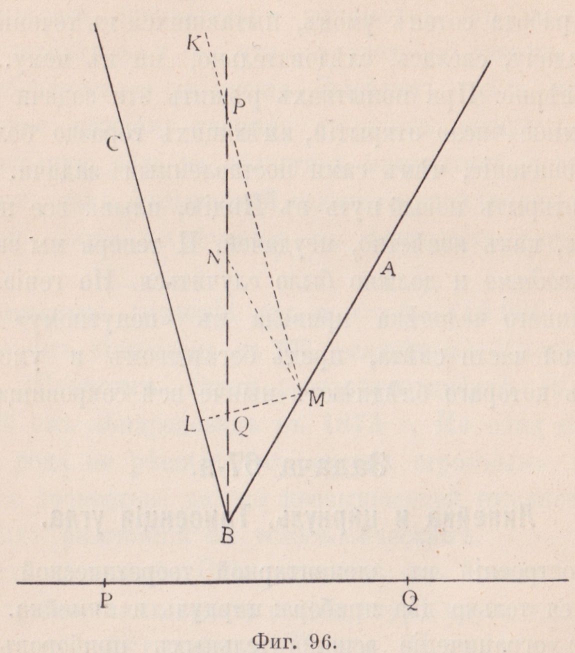
Для построеній въ элементарной теоретической геометріи допускаются только два прибора: циркуль и линейка. Говорятъ, что такое ограниченіе вспомогательныхъ приборовъ сдѣлано знаменитымъ греческимъ философомъ Платономъ.

При этомъ само собой подразумѣвается, что циркуль, о которомъ идетъ рѣчь, имѣетъ неограниченное раствореніе. Если бы циркуль не обладалъ какимъ угодно нужнымъ намъ раствореніемъ, то его нельзя было бы примѣнять для выполненія требуемаго Евклидомъ, съ первыхъ же шаговъ, построенія окружности изъ произвольнаго центра и *какого угодно* радіуса (3-ій постулатъ Евклида). Точно также подразумѣвается, что геометрическая линейка неограничена по длинѣ (2-й постулатъ).

Вмѣстѣ съ тѣмъ необходимо подразумѣвается, что геометрическая линейка *не имѣетъ дѣленій.* Если бы на ея ребрѣ было хотя всего *два* знака, и если бы позволено было ими пользоваться и вдобавокъ передвигать линейку, *приноровляясь* къ

фигурѣ, то задача о раздѣленіи угла на три равныя части (неразрѣшимая въ элементарной геометріи) тотчасъ можетъ быть рѣшена. Въ самомъ дѣлѣ:

Пусть данъ какой-либо уголъ ABC (фиг. 96); и пусть на ребрѣ нашей линейки обозначены 2 точки P и Q (см. ту же фиг. внизу).



Фиг. 96.

Построеніе.

На одной изъ сторонъ угла откладываемъ отъ вершины B прямую $BA = PQ$. Дѣлимъ BA пополамъ въ точкѣ M; изъ точки M проводимъ линіи $MK \parallel BC$ и $ML \perp BC$.

Возьмемъ теперь нашу линейку и приспособимъ ее къ полученной уже фигурѣ такъ, чтобы точка P линейки лежала на прямой KM, точка Q лежала бы на прямой LM, и въ то же время продолженіе PQ линейки проходило бы черезъ вершину даннаго угла B. Тогда прямая BP и есть искомая, отсѣкающая третью часть угла B.

Доказательство. $\angle PBC = \angle BPM$, какъ накресть-лежащіе. Раздѣлимъ PQ пополамъ и середину N соединимъ съ M пря-

мой NM. Точка N есть середина гипотенузы прямоугольнаго треугольника PQM, а потому $PN = NM$, а слѣдовательно $\triangle PNM$ равнобедренный, и значитъ

$$\angle BPM = \angle PMN.$$

Внѣшній же $\angle BNM = \angle BPM + \angle PMN = 2 \angle BPM$.
Вмѣстѣ съ тѣмъ:

$$NM = \frac{1}{2} PQ = BM.$$

Значитъ,

$$\angle MBN = \angle BNM.$$

Итакъ:

$$\angle PBC = \angle BPM = \frac{1}{2} \angle \cdot BNM = \frac{1}{2} \angle ABN = \frac{1}{3} ABC.$$

(Ч. Т. Д.).

Приведенное выше рѣшеніе задачи принадлежитъ Кемпе, который при этомъ поднялъ вопросъ, почему Евклидъ не воспользовался дѣленіемъ линейки и процессомъ ея приспособленія для доказательства 4-й теоремы своей первой книги, гдѣ вмѣсто этого онъ накладываетъ стороны одного треугольника на стороны другого (первое приложеніе способа наложенія, извѣстное каждому ученику). На это можно отвѣтить только, что въ задачу Евклида и не входило отысканіе нѣкоторой точки посредствомъ измѣренія и процесса приспособленія линейки (какъ это мы дѣлали выше въ задачѣ для отысканія точки P). Въ своихъ разсужденіяхъ и доказательствахъ онъ просто накладываетъ фигуру на фигуру,—и только.

Принимаемая нами геометрическая линейка не должна считаться раздѣленной, такъ какъ это слишкомъ раздвинуло бы предѣлы «элемантарности». Но она должна необходимо быть неограниченно длинной,—иначе эти предѣлы слишкомъ бы сузились.

Всѣ вышеприведенныя замѣчанія слѣдуетъ имѣть въ виду, когда говорятъ о циркулѣ и линейкѣ, какъ геометрическихъ приборахъ.

Два отрицательныхъ вывода XIX вѣка.

I. Общее уравненіе выше четвертой степени неразрѣшимо чисто алгебраическимъ путемъ (иначе говоря— въ радикалахъ).

Рѣшеніе уравненій 3-й и 4-й степеней было извѣстно, начиная съ 1545 года. Два съ половиной столѣтія спустя, молодой 22-лѣтній Гауссъ въ своей докторской диссертаціи доказалъ, что всякое алгебраическое ур-іе имѣетъ корень, «дѣйствительный» или «мнимый». Вслѣдъ затѣмъ онъ же далъ еще два доказательства той же теоремы. Въ 1801 году тотъ же Гауссъ замѣтилъ въ одномъ изъ своихъ сочиненій, что, быть можетъ, невозможно разрѣшить съ помощью радикаловъ общее ур-іе степени высшей, чѣмъ четвертая. Это предположеніе было доказано знаменитымъ норвежскимъ математикомъ Абелемъ и было обнародовано къ 1824 году, когда автору его было всего 22 года отъ-роду. Два года спустя то же доказательство было имъ напечатано въ болѣе пространной и понятной формѣ съ выясненіемъ многихъ деталей. Съ этихъ поръ изысканія математиковъ, силившихся раньше найти общее алгебраическое рѣшеніе всякаго уравненія, приняли иное направленіе.

II. Знаменитый «постулатъ о параллельныхъ» Евклида не можетъ быть доказанъ помощью какихъ-либо иныхъ его аксіомъ.

Въ виду важности вопроса, остановимся на исторіи этого знаменитаго «постулата» нѣсколько подробнѣе.

Несмотря па то, что свѣдѣнія древнихъ по геометріи были весьма обширны, всѣ они до 3-го вѣка до Рождества Христова являлись разрозненными, отдѣльными научными фактами, не имѣющими между собой связи. Творцомъ геометріи, какъ науки въ настоящемъ значеніи этого слова, былъ Евклидъ. Въ 3-мъ вѣкѣ до Р. Х. (около 270 г.) этотъ греческій философъ задался цѣлью собрать всѣ найденныя до его времени свойства фигуръ на идеальной плоскости и въ пространствѣ и опредѣлить, какія изъ нихъ существенны, т. е. зависятъ *непосредственно отъ свойствъ самой плоскости и пространства,* и какія, съ другой стороны, могутъ быть выведены, какъ слѣдствія первыхъ. Евклидъ выполнилъ свою задачу и создалъ стройную дедуктивную геометрическую систему, которая явилась первымъ примѣромъ строго научныхъ системъ. Онъ показалъ, что *всѣ* стойства пространственныхъ формъ могутъ быть выведены путемъ однихъ только строго логическихъ разсужденій изъ *трехъ* основныхъ положеній, или аксіомъ, характеризующихъ идеальную плоскость и идеальное пространство древнихъ геометровъ, а именно:

1) фигуры на плоскости и въ пространствѣ могутъ быть перемѣщаемы безъ складокъ и разрыва, 2) прямая линія вполнѣ опредѣляется какими угодно двумя ея точками и 3) если на плоскости изъ какой либо точки прямой линіи будетъ проведенъ къ ней перпендикуляръ, а изъ другой точки той же прямой проведена какая либо наклонная линія, то перпендикуляръ и наклонная необходимо встрѣтятся.

Послѣднее положеніе (3) и есть знаменитый пятый постулатъ Евклида (называемый также 11-ой аксіомой Евклида). Въ наше время его часто предпочитаютъ выражать въ такой болѣе краткой, такъ называемой—Плэйферовской формѣ: *Двѣ пересѣ-*

кающіяся прямыя линіи не могутъ быть обѣ разомъ параллельны одной и той же прямой. Самъ же Евклидъ этотъ постулатъ (или 11-ю аксіому) дословно выражалъ такъ: «Если двѣ прямыя встрѣчаются третьей такъ, что сумма внутреннихъ угловъ, лежащихъ по одну сторону третьей, меньше двухъ прямыхъ, то двѣ первыя прямыя, по достаточномъ продолженіи, встрѣтятся по ту сторону третьей прямой, на которой сумма внутреннихъ угловъ меньше двухъ прямыхъ».

Два первыя изъ приведенныхъ выше положеній суть аксіомы настолько очевидныя и безспорныя, что не возбуждали никогда никакихъ сомнѣній. Не то было съ третьимъ положеніемъ. Оно уже не было столь очевидно, а требовало необходимости убѣдиться, что, какъ бы наклонная ни была близка къ перпендикулярности, она необходимо пересѣчется съ перпендикуляромъ, хотя, можетъ быть, на разстояніи очень далекомъ отъ прямой и для насъ недоступномъ. Такъ какъ непосредственная провѣрка по недоступности для нашихъ чувствъ весьма далекихъ разстояній была невозможна, то Евклидъ и далъ это положеніе, какъ необходимое допущеніе, какъ постулатъ.

Послѣдующіе геометры, не вполнѣ довѣряя генію Евклида, пытались, однако, установить связь между первыми двумя аксіомами и третьей, т. е. доказать, что это третье *допущеніе* (постулатъ) Евклида, принятое имъ за аксіому, можетъ быть *доказано* на основаніи первыхъ двухъ аксіомъ и помѣщено въ ряду теоремъ. И вотъ, съ Птоломея (во 2-мъ вѣкѣ по Р. X.) вплоть до первой четверти XIX столѣтія начинается длинный рядъ попытокъ доказать этотъ постулатъ. Были предложены сотни «доказательствъ».

Въ 1826 году знаменитый русскій геометръ, профессоръ и ректоръ Казанскаго университета, Ник. Ив. Лобачевскій доказалъ всю безуспѣшность подобныхъ попытокъ и обнародовалъ свое доказательство въ 1829 году. Лобачевскій построилъ новую, совершенно самостоятельную геометрію, гдѣ, принимая за аксіомы первыя два изъ указанныхъ выше евклидовскихъ положеній, онъ вмѣсто третьяго положенія (постулата Евклида) принялъ обратное ему. Получилась стройная и логическая геометрическая система, безъ всякихъ ошибокъ и противорѣчій, и

такимъ образомъ сама собой доказывалась независимость первыхъ двухъ аксiомъ отъ постулата, а слѣдовательно, онъ не можетъ быть доказанъ посредствомъ ихъ. Остается, значитъ, принять его за аксiому или строить новую геометрiю.

Изслѣдованiя Лобачевскаго оставались долгое время непонятыми и неизвѣстными. Русскими учеными они были встрѣчены даже недоброжелательно. Первые благопрiятные отзывы о нихъ (Гаусса) сдѣлались извѣстными въ Германiи только въ 1846 г. изъ обнародованной переписки Гаусса. Но только начиная съ 60-хъ годовъ XIX столѣтiя труды Лобачевскаго нашли себѣ достойную оцѣнку и послужили основанiемъ ряда другихъ замѣчательныхъ работъ различныхъ математиковъ.

Усилiя, направлявшiяся раньше для доказательства невозможнаго, обратились теперь къ развитiю такъ называемой не-Евклидовской геометрiи, къ изученiю геометрiи n-измѣренiй, при допущенiяхъ, обратныхъ или несогласныхъ съ общепринятыми аксiомами геометрiи Евклида. И, какъ всегда бываетъ въ подобныхъ случаяхъ, новое завоеванiе человѣческаго ума, новая побѣжденная трудность открыли новыя области для изслѣдованiя, новое направленiе мысли и методовъ изысканiя; и такимъ образомъ на очередь выдвинулись новыя еще болѣе трудныя задачи для рѣшенiя. Поле дѣятельности, открывающееся пытливому уму,—безгранично.

Желающимъ основательно ознакомиться съ исторiей развитiя этого глубоко интереснаго вопроса можемъ рекомендовать талантливую книгу проф. Роберто Бонала *«Не-Евклидова геометрiя»*. Книга эта недавно появилась и на русскомъ языкѣ въ прекрасномъ переводѣ А. Р. Кулишера.

Николай Ивановичъ Лобачевскій.

(1793—1856).

Начиная съ Евклида Александрійскаго геометры всего міра въ продолженіе болѣе чѣмъ двадцати вѣковъ работали надъ выясненіемъ истинной связи между основными аксіомами геометріи. Завидная честь завершить эту многовѣковую работу и открыть огромные, новые горизонты для дальнѣйшихъ изслѣдованій принадлежитъ, какъ упомянуто въ предыдущей главѣ, нашему великому соотечественнику, Н. И. Лобачевскому. Имя этого геніальнаго математика извѣстно нынѣ всему образованному, и во всякомъ случаѣ—всему математическому міру, хотя умеръ онъ непонятый и неоцѣненный по достоинству. Современники, кромѣ великаго Гаусса, были не въ силахъ его понять.

Жизнь и дѣятельность иныхъ великихъ людей, помимо поучительности, всегда еще полна заманчивой таинственности. Что даетъ силу этимъ рыцарямъ духа подъ градомъ насмѣшекъ и общаго непризнанія творить и созидать? Гдѣ тотъ источникъ святого безпокойства, который не даетъ генію почить ни на служебныхъ, ни на семейныхъ, ни на всякихъ иныхъ лаврахъ, а направляетъ его въ сторону, казалось бы, однихъ непріятностей и огорченій? Ученая дѣятельность и жизнь Лобачевскаго весьма замѣчательны съ этой послѣдней стороны и могутъ служить ободряющимъ примѣромъ для тѣхъ, кто, преслѣдуя великія цѣли, иногда изнемогаетъ и отчаивается предъ равнодушіемъ, непониманіемъ, а иногда даже и враждебностью средней обывательщины. Не задаваясь цѣлью дать здѣсь связную, хотя бы и сжатую, біографію Н. И. Лобачевскаго, постараемся, однако, освѣтить тѣ важнѣйшіе факты его жизни, которые имѣютъ связь съ его математическимъ развитіемъ и на которые есть неоспоримыя свидѣтельства и архивные документы. О студенчествѣ и первыхъ ученыхъ шагахъ Лобачевскаго мы беремъ драгоцѣнныя данныя въ «разсказахъ по архивнымъ документамъ» проф. Н. Булича: *Изъ первыхъ лѣтъ Казанскаго университета*. Книга эта мало кому знакома по ея спеціальному характеру, хотя она и содержитъ въ себѣ весьма много интереснаго.

Н. И. Лобачевскій — сынъ бѣднаго чиновника, уѣзднаго землемѣра изъ Макарьева, Нижегородской губ. Въ оффиціальныхъ бумагахъ онъ показанъ *изъ разночинцевъ*, что означаетъ непринадлежность къ сословію дворянъ. Подобно многимъ другимъ знаменитымъ математикамъ, юноша Лобачевскій въ первые годы студенчества не предполагалъ даже избрать предметомъ своихъ постоянныхъ занятій математику. «Онъ примѣтно предуготовляетъ себя для медицинскаго факультета», — писалъ о немъ къ попечителю Яковкинъ, замѣтившій его дарованія. Появленіе въ Казанскомъ университетѣ профессора математики Бартельса, вызваннаго изъ Германіи,—свѣтлой и ученой личности,—побудило Лобачевскаго избрать предметомъ занятій математику. Вскорѣ онъ дѣлается однимъ изъ самыхъ успѣвающихъ учениковъ Бартельса. Въ свою очередь, профес-

соръ полюбилъ Лобачевскаго, и его заступничество не разъ помогало молодому и нѣсколько вѣтренному студенту при столкновеніяхъ съ университетской полиціей. Инспекторскій журналъ,—разсказываетъ Н. Буличъ въ названной нами книгѣ,—за годы пребыванія Лобачевскаго въ студентахъ даетъ нѣсколько свидѣтельствъ объ этихъ столкновеніяхъ, причина которыхъ лежала въ живомъ характерѣ молодого студента, въ естественномъ чувствѣ свободы, которое проявлялось, какъ своеволіе, въ желаніи отстоять свою самостоятельность, что̀ считалось дерзостью. Самыя шалости характеризуютъ тогдашнихъ студентовъ. Лобачевскій, какъ и многіе изъ его товарищей, казенныхъ студентовъ, жившихъ въ университетѣ, любилъ заниматься пиротехникою. Разъ Лобачевскій сдѣлалъ ракету и вмѣстѣ съ другими пустилъ ее въ одиннадцать часовъ вечера на университетскомъ дворѣ. За это и за то, «что учинилъ непризнаніе, упорствуя въ немъ, подвергъ наказанію многихъ, совершенно сему не причастныхъ»,—былъ посаженъ въ карцеръ по опредѣленію совѣта. Въ другой разъ, будучи уже правящимъ должность *камернаго студента* («камерный студентъ есть помощникъ помощника инспектора казенныхъ студентовъ»—по опредѣленію правилъ того времени), Лобачевскій былъ замѣченъ «въ участвованіи и потачкѣ проступкамъ студентовъ, грубости и ослушаніи». За эти проступки онъ наказанъ былъ публичнымъ выговоромъ отъ инспектора студентовъ, лишенъ званія правящаго должность камернаго студента, 60 рублей на книги и учебныя пособія, которые только что были ему назначены «за особенные успѣхи въ наукахъ и благоповеденіе» и отпуска до разрѣшенія начальства. Все это происходило на святкахъ 1810 года. Лобачевскому шелъ 18-й годъ, онъ былъ на послѣднемъ курсѣ, молодость требовала удовлетворенія, а потому совершенно естественно и простительно, что, по словамъ инспекторскаго журнала: «въ генварѣ мѣсяцѣ Лобачевскій первый оказался самаго худого поведенія. Несмотря на приказаніе начальства не отлучаться изъ университета, онъ въ новый годъ, а потомъ еще разъ, ходилъ въ маскарадъ и многократно въ гости, за что опять наказанъ написаніемъ имени на черной доскѣ и выставленіемъ оной въ студентскихъ комнатахъ на не-

дѣлю. Несмотря на сіе, онъ послѣ снова еще былъ въ маскарадѣ».

Студенческая жизнь Лобачевскаго отличалась вообще нѣсколько бурнымъ характеромъ, но изъ среды своихъ сверстниковъ онъ выдавался далеко впередъ, какъ по уклоненіямъ отъ тогдашнихъ правилъ благоповеденія, вызывавшимъ карательныя мѣры противъ него, такъ и по своимъ дарованіямъ и успѣхамъ въ математикѣ. Вотъ почему только о немъ одномъ дошло до насъ «*историческое изображеніе поведенія*» его; проступки Лобачевскаго называются *достопримѣчательными*, характеръ—упрямымъ, нераскаяннымъ, «весьма много мечтательнымъ о самомъ себѣ», его мнѣніе «получило многія ложныя понятія» (такъ въ журналѣ инспектора, помощникомъ его Кондыревымъ, было записано, что Лобачевскій «въ значительной степени явилъ *признаки безбожія*» (!) — обвиненіе, которое во время Магницкаго имѣло бы весьма печальныя послѣдствія). Требовались инспекціею противъ Лобачевскаго рѣшительныя мѣры, «самыя побудительныя средства со стороны милосердія или строгости, каковыя найдетъ благоразуміе начальства». Вопросъ о судьбѣ Лобачевскаго перенесенъ былъ въ совѣтъ. Только настоянія Бартельса и тѣхъ профессоровъ, у которыхъ Лобачевскій занимался, доставили ему возможность получить степень кандидата, а вскорѣ затѣмъ магистра, наравнѣ съ прочими его товарищами.

Бартельсъ считалъ Лобачевскаго лучшимъ изъ учениковъ своихъ. Вотъ что̀ писалъ онъ попечителю Румовскому объ успѣхахъ своихъ слушателей и въ особенности о Лобачевскомъ около того времени (приводимъ слова его въ современномъ переводѣ, сдѣланномъ самимъ Румовскимъ и представланномъ имъ министру):

«Послѣдніе два (Симоновъ и Лобачевскій), особливо же Лобачевскій, оказали столько успѣховъ, что они даже во всякомъ нѣмецкомъ университетѣ были бы отличными, и я льщусь надеждою, что если они продолжать будутъ упражняться въ усовершенствованіи своемъ, то займутъ значущія мѣста въ математическомъ кругу. О искусствѣ послѣдняго предложу хотя одинъ примѣръ. Лекціи свои располагаю я такъ, что студенты

мои въ одно и то же время бываютъ слушателями и преподавателями. По сему правилу поручилъ я предъ окончаніемъ курса старшему Лобачевскому предложить подъ моимъ руководствомъ пространную и трудную задачу о кругообращеніи (Rotation), которая мною для себя уже была по Лагранжу въ удобопонятномъ видѣ обработана. Въ то же время Симонову приказано было записывать теченіе преподаванія, которое я въ четыре пріема кончилъ, дабы сообщить его прочимъ слушателямъ. Но Лобачевскій, не пользовавшись сею запискою, при окончаніи послѣдней лекціи подалъ мнѣ рѣшеніе сей столь запутанной задачи, на нѣсколькихъ листочкахъ въ четверку написанное. Г. академикъ Вишневскій, бывшій тогда здѣсь, неожиданно восхищенъ былъ симъ небольшимъ опытомъ знаній нашихъ студентовъ».

Эти успѣхи въ математикѣ, за которые Лобачевскій получилъ вмѣстѣ съ другими благодарность отъ министра народнаго просвѣщенія, и были причиною снисходительности къ нему совѣта, возведшаго его вмѣстѣ съ прочими въ степень магистра, т. е. оставившаго его при университетѣ (въ педагогическомъ институтѣ) съ цѣлью приготовленія къ профессорскому званію. Впрочемъ Лобачевскій сознаlъ свое положеніе. «Вчера по позволенію явившись въ совѣтъ, пишетъ Яковкинъ, оказалъ совершенное признаніе и раскаяніе въ прежнихъ своихъ поступкахъ, публично обѣщавши совершенно исправиться, а посему совѣтъ и рѣшился его помѣстить въ число представляемыхъ къ удостоенію званія магистровъ, дабы излишнею строгостью не привести его, какъ весьма лестную надежду дарованіями и успѣхами подающаго для университета, въ отчаяніе и не убить духъ его» (12 іюля 1811 года). Защитниками Лобачевскаго въ совѣтѣ были профессоры Бартельсъ, Германъ, Литровъ и Броннеръ.

Попечитель Казанскаго учебнаго округа Румовскій утвердилъ представленіе совѣта, но далъ съ своей стороны предостереженіе Лобачевскому: «А студенту Николаю Лобачевскому,—писалъ онъ въ своемъ предложеніи совѣту (7 августа 1811 г., № 787),—занимающему первое мѣсто по худому поведенію, объявить мое сожалѣніе о томъ, что онъ отличныя свои способ-

ности помрачаетъ несоотвѣтственнымъ поведеніемъ, и для того чтобы онъ постарался перемѣнить и исправить оное,—въ противномъ случаѣ, если онъ совѣтомъ моимъ не захочетъ воспользоваться, и опять принесена будетъ жалоба на него, тогда я принужденъ буду довести о томъ до свѣдѣнія г. министра просвѣщенія».

Званіе магистра возлагало на него, по тогдашнимъ правиламъ, «споспѣшествованіе профессору или адъюнкту въ разсужденіе бо́льшихъ успѣховъ ихъ слушателей». Магистры должны были заниматься съ студентами повтореніемъ пройденнаго (не въ часы, однако, назначенные для лекцій) и «объясненіемъ слушателямъ того, чего они не понимаютъ, такъ какъ многіе изъ гг. профессоровъ преподаютъ и объясняютъ лекціи на иностранныхъ языкахъ, слушатели же ихъ, преимущественно же вновь поступившіе, часто, особенно въ началѣ курса, по причинѣ объясненія на иностранномъ языкѣ для матеріи совсѣмъ новой, не могутъ иногда всего понимать предлагаемаго профессоромъ ясно». За это магистры получали жалованье. Лобачевскій, какъ магистръ, стоялъ въ самыхъ близкихъ отношеніяхъ къ Бартельсу. Онъ занимался у него на дому по четыре часа въ недѣлю, и у насъ есть свѣдѣнія, что на первыхъ порахъ магистерства предметами изученія Лобачевскаго, подъ руководствомъ Бартельса, были ариѳметика Гаусса и первый томъ Лапласовой «*Небесной механики*».

Въ 1814 году Лобачевскій былъ повышенъ въ званіе адъюнкта чистой математики и началъ читать свои лекціи. Съ 1829 года въ отсутствіе профессора астрономіи Симонова, находившагося въ кругосвѣтномъ плаваніи, Лобачевскій въ теченіе двухъ лѣтъ читалъ сверхъ того астрономію и завѣдывалъ обсерваторіей.

Съ изслѣдованіями, которыя создаютъ новую эпоху въ области геометрической науки, Лобачевскій впервые выступилъ въ засѣданіи факультета 12 февраля 1826 года, гдѣ онъ читалъ свое «Expostition succincte des principes de la Géometrie», («Краткое изложеніе началъ геометріи»), которое, къ сожалѣнію, и до сихъ поръ напечатано не было. Статья «О Началахъ Геометріи» была напечатана въ «Казанскомъ Вѣстникѣ» за 1829 и 1830 годъ, и представляетъ только весьма сжатое, а потому трудное для чтенія, изложеніе полученныхъ имъ результатовъ

построенія «Геометріи въ болѣе обширномъ смыслѣ, нежели, какъ намъ представилъ ее первый Евклидъ».

Въ слѣдующемъ сочиненіи: «Воображаемая Геометрія», переведенномъ также на французскій языкъ, Лобачевскій, «оставляя геометрическія построенія и выбирая краткой обратный путь», показываетъ, что «главныя уравненія, которыя онъ нашелъ для зависимости сторонъ и угловъ треугольника въ *воображаемой Геометріи*, могутъ быть приняты съ пользою въ Аналитикѣ и никогда не приведутъ къ заключеніямъ ложнымъ, въ какомъ бы то ни было отношеніи».

Такимъ образомъ сдѣланное допущеніе о невозможности доказать постулатъ Евклида было разобрано и изслѣдовано какъ геометрическимъ, такъ и аналитическимъ путемъ и ни къ какимъ противорѣчіямъ не повело. Вопросъ о возможности невѣрности одиннадцатой аксіомы Евклида былъ рѣшенъ и рѣшенъ утвердительно. Но, съ одной стороны, пріемъ, оказанный первому сочиненію Лобачевскаго, заставилъ его «подозрѣвать, что его сочиненіе, казавшись съ перваго взгляда темнымъ, предупреждало охоту заняться имъ съ нѣкоторымъ вниманіемъ и даже могло подать поводъ усумниться въ строгости его сужденія и въ вѣрности выведенныхъ заключеній»; съ другой стороны косвенная аналитическая повѣрка не могла замѣнить строгаго прямого доказательства. Поэтому Лобачевскій снова принимается за изложеніе того же вопроса и въ 1835—1838 годахъ печатаетъ сочиненіе: «Новыя Начала Геометріи съ полной теоріей параллельныхъ».

Изъ двухъ остальныхъ его сочиненій по Геометріи первое: «Beiträge zu den Parallellinien» представляетъ нѣсколько сокращенное изложеніе «Новыхъ Началъ Геометріи», а второе: «Пангеометрія», записанная подъ диктовку уже слѣпого Лобачевскаго его учениками и изданная одновременно на русскомъ и французскомъ языкахъ незадолго до его смерти, представляетъ снова конспективное изложеніе всѣхъ его изслѣдованій по Геометріи. Это послѣднее сочиненіе нѣсколько уступаетъ его «Новымъ Началамъ Геометріи», которыя можно считать лучшимъ изъ всѣхъ его произведеній. По силѣ и изяществу изложенія «Новыя Начала Геометріи» мало чѣмъ уступаютъ «Началамъ»

Евклида, и по-истинѣ могутъ служить для Лобачевскаго «monumentum aere perennius, regalique situ pyramidum altius». Тому, кто хочетъ познакомиться съ работами Лобачевскаго, необходимо начинать съ изученія именно этого сочиненія.

Наряду съ ученой и преподавательской дѣятельностью шла и высокоплодотворная административная дѣятельность Н. И. Лобачевскаго. Онъ былъ деканомъ и 19 лѣтъ ректоромъ университета, несъ другія разнообразныя и сложныя обязанности по управленію. Вотъ какъ проф. Н. Н. Буличъ отзывается вообще о дѣятельности и характерѣ Лобачевскаго: «Его независимый и самостоятельный характеръ выдержалъ такую нравственную ломку, какъ тяжелое время реакціи въ послѣдніе годы царствованія Александра I и попечительство въ Казани Магницкаго, не поступившись своими убѣжденіями, не измѣнивъ имъ и унеся въ старость молодое сремленіе къ наукѣ, уваженіе къ ней и восторги духовнаго наслажденія. Если спеціалисты говорятъ о его «по-истинѣ глубокомысленныхъ лекціяхъ», доступныхъ однако только избранной аудиторіи, въ послѣдніе годы его жизни, то мы прибавимъ къ этому личное воспоминаніе о его публичныхъ лекціяхъ по физикѣ, гдѣ ему удавалось излагать науку популярно и гдѣ раскрывалъ онъ массу самыхъ разнообразныхъ свѣдѣній. Въ старые глухіе и спящіе годы провинціи, когда все было такъ смирно, гладко и довольно кругомъ, когда однообразныя явленія жизни только скользили по душѣ, не задѣвая и не возбуждая ее, такія лекціи, какъ Лобачевскаго, были отраднымъ явленіемъ. Лобачевскій читалъ просто, безъ желанія придать внѣшнюю красоту своей рѣчи, безъ реторической эмфазы [1]) и крика, но въ словахъ его слышались и его логическій умъ и широкое образованіе. Спокойнымъ, ровнымъ голосомъ онъ дѣлалъ свои широкія обобщенія, вызывалъ увлекательные образы и возбуждалъ мысль»...

«Всего интереснѣе было бы прослѣдить,—замѣчаетъ тотъ же проф. Буличъ, — какимъ образомъ развилось его глубокое абстрактное мышленіе. Лобачевскій не бывалъ въ Европѣ; двѣ-три поѣздки въ русскія столицы были кратковременны; онъ

---

¹) Преувеличеніе, напыщенность, надутость.

почти не оставлялъ Казани. Къ сожалѣнію, и внутреннее развитіе и интимная жизнь Лобачевскаго мало извѣстны, несмотря на то, что живы еще нѣкоторые, бывшіе съ нимъ въ близкихъ отношеніяхъ. Принадлежа по женѣ къ тому, что называлось въ то время казанскимъ обществомъ, Лобачевскій появлялся и въ немъ, но представлялъ изъ себя скорѣе задумчивую, чѣмъ дѣятельную фигуру, особенно въ послѣдніе годы своей жизни. Сколько намъ извѣстно, даже близкіе къ нему люди смотрѣли на него съ точки зрѣнія, раскрывающейся въ обыденной морали Хемницеровой басни «Метафизикъ».

Какъ же относились современники къ научной дѣятельности Лобачевскаго, главное—къ его геометрическимъ изслѣдованіямъ, составляющимъ нынѣ славу и гордость русской математической науки? На этотъ счетъ сохранились также весьма любопытныя свидѣтельства. Въ Россіи работы его были встрѣчены... глумленіемъ. Въ № 41 распространеннаго тогда журнала «Сынъ Отечества» за 1834 годъ появилась статья, оскорбительная для Лобачевскаго. Но отвѣтъ его на эту статью, по сообщенію самого Лобачевскаго, напечатанъ не былъ.

Статья въ «Сынѣ Отечества» носитъ заглавіе: «О начертательной Геометріи соч. Г. Лобачевскаго» и содержитъ критическій отзывъ о сочиненіи Лобачевскаго: «О Началахъ Геометріи». Для лучшей характеристики впечатлѣнія, произведеннаго сочиненіемъ Лобачевскаго на современныхъ ему русскихъ математиковъ, слѣдуетъ привести здѣсь интереснѣйшія мѣста названной статьи въ подлинномъ видѣ. Вотъ они:

«Есть люди, которые, прочитавъ иногда книгу, говорятъ: она слишкомъ проста, слишкомъ обыкновенна, въ ней не о чемъ и подумать. Такимъ любителямъ думанья совѣтую прочесть Геометрію Г. Лобачевскаго. Вотъ ужъ подлинно есть о чемъ подумать: Многіе изъ первоклассныхъ нашихъ математиковъ читали ее, думали и ничего не поняли. Послѣ сего уже не считаю нужнымъ упоминать, что и я, продумавъ надъ сею книгою нѣсколько времени, ничего не придумалъ, т. е. не понялъ почти ни одной мысли. Даже трудно было бы понять и то, какимъ образомъ г. Лобачевскій изъ самой легкой и самой ясной въ математикѣ науки, какова Геометрія, могъ сдѣлать такое тяже-

лое, такое темное и непроницаемое ученіе, если бы самъ онъ отчасти не надоумилъ насъ, сказавъ, что его Геометрія отлична отъ *употребительной*, которой всѣ мы учились, и которой, вѣроятно, уже разучиться не можемъ, и есть только *воображаемая*. Да, теперь все очень понятно. Чего не можетъ представить воображеніе, особливо живое и вмѣстѣ уродливое? Почему не вообразить, напр., черное бѣлымъ, круглое четыреугольнымъ, сумму всѣхъ угловъ въ прямолинейномъ треугольникѣ меньше двухъ прямыхъ и одинъ и тотъ же опредѣленный интегралъ равнымъ то $\frac{\pi}{4}$, то ∞? Очень, очень можно, хотя для разума все это и непонятно. Но спросятъ: для чего же писать, да еще и печатать такія нелѣпыя фантазіи? Признаюсь, на этотъ вопросъ отвѣчать трудно. Авторъ нигдѣ не намекнулъ на то, съ какою цѣлью онъ печаталъ сіе сочиненіе, и мы должны, слѣдовательно, прибѣгнуть къ догадкамъ. Правда, въ одномъ мѣстѣ онъ ясно говоритъ, что будто бы недостатки, замѣченные имъ въ употребляемой доселѣ Геометріи, заставили его сочинить и издать эту новую Геометрію; но это, очевидно, несправедливо, и по всей вѣроятности сказано для того, чтобы еще болѣе скрыть настоящую цѣль его сочиненія. Во-первыхъ, это противорѣчитъ тому, что сказалъ самъ же авторъ о своей Геометріи, т. е. что она въ природѣ вовсе не существуетъ, а могла существовать только въ его воображеніи, и для измѣреній на самомъ дѣлѣ остается совершенно безъ употробленія; во-вторыхъ, это дѣйствительно противорѣчитъ всему тому, что въ ней содержится, и судя по чему скорѣе можно согласиться на то, что новая Геометрія выдумана для опроверженія прежней, нежели для пополненія оной. Притомъ же, да позволено намъ будетъ нѣсколько коснуться личности. Какъ можно подумать, чтобы г. Лобачевскій, ординарный профессоръ математики, написалъ съ какою нибудь серьезною цѣлію книгу, которая не много бы принесла чести и послѣднему приходскому учителю. Если не ученость, то по крайней мѣрѣ здравый смыслъ долженъ имѣть каждый учитель, а въ новой Геометріи нерѣдко недостаетъ и сего послѣдняго.

«Соображая все сіе, съ большою вѣроятностью заключаю, что истинная цѣль, для которой г. Любачевскій сочинилъ и

издалъ свою Геометрію, есть просто шутка, или, лучше, сатира на ученыхъ математиковъ, а можетъ быть и вообще на ученыхъ сочинителей настоящаго времени. Засимъ и уже не съ вѣроятностію» только, а съ совершенною увѣренностью полагаю, что безумная страсть писать какимъ-то страннымъ и невразумительнымъ образомъ, весьма замѣтная съ нѣкотораго времени во многихъ изъ нашихъ писателей, и безразсудное желаніе открывать новое при талантахъ, едва достаточныхъ для того, чтобы надлежащимъ образомъ постигать старое, суть два недостатка, которые авторъ въ своемъ сочиненіи намѣренъ былъ изобразить и изобразилъ какъ нельзя лучше.

«Во-первыхъ, новая Геометрія, какъ я уже упомянулъ о томъ выше, написана такъ, что никто изъ читавшихъ ее почти ничего не понялъ. Желая покороче познакомить васъ съ нею, я собиралъ въ одну точку все мое вниманіе, приковывалъ его къ каждому періоду, къ каждому слову и даже къ каждой буквѣ, и при всемъ томъ такъ мало успѣлъ прояснить мракъ, кругомъ облегающій это сочиненіе, что едва въ состояніи разсказать вамъ то, о чемъ въ немъ говорится, не говоря ни слова о томъ, что говорится. Авторъ говоритъ, кажется, что-то о треугольникахъ, о зависимости въ нихъ угловъ отъ сторонъ, чѣмъ главнѣйшимъ образомъ и отличается его Геометрія отъ нашей; потомъ предлагаетъ новую теорію параллельныхъ, которая, по собственному его признанію, находится или нѣтъ въ природѣ, никто доказать не въ состояніи; наконецъ, слѣдуетъ разсмотрѣніе того, какимъ образомъ въ этой воображаемой геометріи опредѣляются величина кривыхъ линій, площадей, кривыхъ поверхностей и объемовъ тѣлъ,—и все это, еще разъ повторяю, написано такъ, что ничего и понять невозможно.

«Во-вторыхъ, въ концѣ книги г. Лобачевскій помѣстилъ два опредѣленные интеграла, которые *онъ открылъ мимоходомъ, идя прямо къ своей цѣли дать общія правила для измѣренія всѣхъ геометрическихъ величинъ и дозволивши себѣ только нѣкоторыя примѣненія*. Открытіе весьма замѣчательное! Ибо одинъ изъ сихъ новыхъ интеграловъ уже давно извѣстенъ, и находится гораздо легчайшимъ образомъ; другой совершенно невѣренъ, потому что ведетъ къ той нелѣпости, которую мы уже

замѣтили выше, т. е. что одинъ и тотъ же опредѣленный интегралъ равенъ то $\frac{\pi}{4}$, то ∞. Но не таковы ли и въ самомъ дѣлѣ большею частію бываютъ прославляемыя у насъ новооткрытія? Не часто ли случается, что старое, представленное только въ какомъ нибудь странномъ образѣ, выдаютъ намъ за новое, или и новое, но ложное, за чрезвычайно важное открытіе? Хвала г. Лобачевскому, принявшему на себя трудъ обличить съ одной стороны наглость и безстыдство ложныхъ изобрѣтателей, съ другой простодушное невѣжество почитателей ихъ новоизобрѣтеній.

«Но, сознавая всю цѣну сочиненія г. Лобачевскаго, я не могу однакожъ не попенять ему за то, что онъ, не давъ своей книгѣ надлежащаго заглавія, заставилъ насъ долго думать понапрасну. Почему бы вмѣсто заглавія: «О началахъ Геометріи», не написать напримѣръ — Сатира на Геометрію, Карикатура на Геометрію или что нибудь подобное? Тогда бы всякій съ перваго взгляда видѣлъ, что это за книга, и авторъ избѣжалъ бы множества невыгодныхъ для него толковъ и сужденій. Хорошо, что мнѣ удалось проникнуть настоящую цѣль, съ которой написана эта книга,—а то, Богъ знаетъ, что̀ бы и я о ней и ея авторѣ думалъ. Теперь же я думаю и даже увѣренъ, что почтенный авторъ почтетъ себя весьма мнѣ обязаннымъ за то, что я показалъ истинную точку зрѣнія, съ которой должно смотрѣть на его сочиненіе»...

Такими глумленіями встрѣчали русскіе современники плоды глубокихъ изысканій великаго ума. И есть весьма вѣскія основанія думать, что приведенная выше въ отрывкахъ статья въ «Сынѣ Отечества» принадлежитъ не какому либо диллетанту, а «глубокоученому» россійскому того времени академику. Извѣстно также, напр., что талантливый русскій математикъ того времени, Остроградскій, открыто насмѣхался надъ изысканіями казанскаго профессора. Заграницей работы Лобачевскаго были большинствомъ ученыхъ просто не замѣчены. Только отъ орлинаго взора великаго Гаусса не укрылась вся важность изысканій скромнаго русскаго провинціальнаго профессора. Но Гауссъ сообщилъ объ этомъ только въ частномъ письмѣ къ Шумахеру въ 1846 году. Вотъ это историческое письмо:

«Въ послѣднее время я имѣлъ случай перечитать небольшое сочиненіе Лобачевскаго подъ заглавіемъ: Geometrische Untersuchungen zur Teorie der Parallellinien. Это сочиненіе содержитъ въ себѣ основанія геометріи, которая должна бы была существовать, и строгое развитіе которой представляло бы непрерывную цѣпь, если бы Евклидова геометрія не была истинною. Нѣкто Швейкартъ далъ этой геометріи имя «géométrie australe», а Лобачевскій — геометріи воображаемой.

«Вы знаете, что уже пятьдесятъ четыре года (съ 1792), какъ я раздѣляю тѣ же взгляды, не говоря здѣсь о нѣкоторыхъ развитіяхъ, которыя получили мои идеи объ этомъ предметѣ впослѣдствіи. Слѣдовательно, я собственно не нашелъ въ сочиненіи Лобачевскаго ни одного новаго для меня факта; но изложеніе весьма различно отъ того, какое я предполагалъ сдѣлать, и авторъ трактуетъ о предметѣ, *какъ знатокъ, въ истинно-геометрическомъ духѣ.* Я считалъ себя обязаннымъ обратить ваше вниманіе на эту книгу, чтеніе которой не преминетъ вамъ доставить живѣйшее удовольствіе».

«Гетингенъ, 28 ноября 1846 года».

Зналъ ли что-либо объ этомъ письмѣ Гаусса Лобачевскій, уже вступившій въ послѣднее десятилѣтіе своей жизни? Трудно дать утвердительный отвѣтъ. Переписка Гаусса съ Шумахеромъ была опубликована много позже смерти Лобачевскаго. Нашъ же «Коперникъ Геометріи», по выраженію англійскаго ученаго Клиффорда, умеръ въ 1856 году 12 февраля. Признаніе и оцѣнка его заслугъ принадлежитъ послѣднимъ 2—3 десятилѣтіямъ, когда пониманію и уясненію его геніальныхъ мыслей была посвящена цѣлая литература.

Пониманію Лобачевскаго въ особенности содѣйствовали своими трудами такіе выдающіеся ученые, какъ Бельтрами, Риманнъ, Гельмгольцъ, Кэли, Гуэль, Клейнъ, Клиффордъ, Ли, Пуанкаре, Киллингъ и проч.

22 октября 1893 года Россія, или, вѣрнѣе, — всѣ русскія физико-математическія общества торжественно справляли 100-лѣтнія поминки дня рожденія Лобачевскаго. Незадолго до этого времени Казанскій университетъ издалъ «Полное собраніе со-

чиненій по геометріи Н. И. Лобачевскаго» въ 2-хъ томахъ (1883 и 1886 гг.), но на самомъ дѣлѣ *«Полнаго собранія»* всѣхъ безъ исключенія сочиненій великаго русскаго «Коперника Геометріи» нѣтъ,—да и будетъ ли скоро?.. Въ общемъ, надо сознаться, что Лобачевскому на Руси «везетъ» гораздо менѣе, чѣмъ заграницей. Проявившійся было къ юбилею 1893 года интересъ къ Лобачевскому въ широкихъ кругахъ скоро ослабъ. Были собранія различныхъ обществъ, были дѣльныя, красивыя рѣчи, но... «облетѣли цвѣты, догорѣли огни» и... все почти остается по старому,—и это въ то время, какъ изысканія Лобачевскаго о параллельныхъ линіяхъ приняты, напр., въ японскихъ школахъ въ качествѣ пособія при преподаваніи геометріи. Слѣдуетъ, положимъ, сознаться, что чтеніе многихъ произведеній Лобачевскаго въ подлинникѣ требуетъ довольно значительной подготовки. Лобачевскій, вообще, кратокъ и сжатъ. Но, съ другой стороны, ничего почти не сдѣлано до сихъ поръ у насъ къ популяризаціи работъ Лобачевскаго въ смыслѣ переложенія ихъ на болѣе понятный современный математическій языкъ. Единственную [1]) достойную вниманія попытку въ этомъ отношеніи мы нашли въ работѣ Н. П. Соколова: *«значеніе изслѣдованій Н. И. Лобачевскаго въ Геометріи и ихъ вліяніе на ея дальнѣйшее развитіе»*.

Талантливый авторъ въ этой книгѣ дѣлаетъ попытку изложить по возможности кратко и популярно содержаніе главнаго сочиненія Лобачевскаго «Новыя Начала Геометріи». Нельзя не привѣтствовать такой попытки, какъ нельзя не пожалѣть и о томъ, что г. Соколовъ не продолжалъ своихъ трудовъ къ дальнѣйшей и еще большей популяризаціи трудовъ Лобачевскаго. Во всякомъ случаѣ ближе къ концу этой книги читатель найдетъ содержаніе «Новыхъ Началъ Геометріи» Лобачевскаго въ изложеніи Н. П. Соколова. Быть можетъ, чтеніе этой главы заинтересуетъ кого-либо настолько, что направитъ его на путь изученія подлинныхъ трудовъ Лобачевскаго для широкой популяризаціи его идей.

---

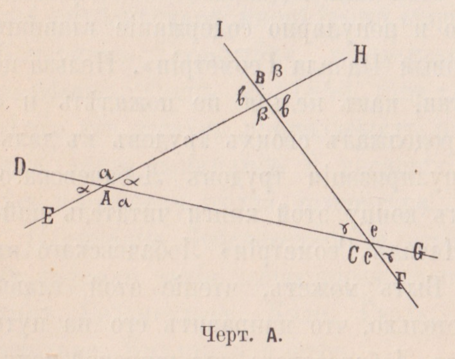
[1]) Послѣ выхода въ свѣтъ 1-го изданія настоящей книги появился переводъ А. Р. Кулишера прекраснаго труда итальянскаго проф. Роберто Бонола «Не-Евклидова Геометрія».

Два письма о постулатѣ Евклида.

Какъ разъ въ то время, когда въ старой губернской казанской глуши Н. И. Лобачевскій уже рѣшилъ и обнародовалъ свое рѣшеніе относительно мѣста и значенія въ геометріи 11-ой аксіомы (V-го постулата) Евклида, извѣстные европейскіе ученые все еще дѣлали тщательныя попытки «доказать» это Евклидовское допущеніе. Авторитетъ Евклида былъ еще настолько великъ, что никто не осмѣливался подозрѣвать о возможности геометріи и пространства, отличныхъ отъ Евклидовскихъ. Все дѣло заключалось только, по мнѣнію тогдашнихъ ученыхъ, въ возможномъ упрощеніи «Началъ» александрійскаго геометра,— въ стремленіи изложить теорію параллельныхъ линій безъ знаменитаго постулата. Нижеприводимое письмо (отъ 1831 г.) проф. Шумахера къ Гауссу даетъ настолько типичный образчикъ подобныхъ попытокъ, что приводимъ его въ подлинномъ переводѣ:

Шумахеръ къ Гауссу.

Я беру на себя смѣлость представить вамъ попытку, которую я сдѣлалъ, чтобы доказать, безъ помощи теоріи параллелей, предложеніе, по которому сумма трехъ угловъ треугольника равна 180°, — откуда вытекало бы само собою доказательство Евклидовой аксіомы. Единственныя теоремы, которыя я предполагаю доказанными, суть: что сумма всѣхъ угловъ, образуемыхъ около одной точки, равна 360° или четыремъ прямымъ угламъ, и еще, что углы, противоположные въ вершинѣ, равны.



Черт. A.

Продолжимъ неопредѣленно стороны прямолинейнаго треугольника ABC (черт. **A**), или, другими словами, разсмотримъ систему трехъ прямыхъ въ одной плоскости, которыя своими

пересѣченіями образуютъ треугольникъ ABC. При трехъ вершинахъ имѣемъ уравненія:

$$2a + 2\alpha = 4d,$$
$$2b + 2\beta = 4d,$$
$$2c + 2\gamma = 4d,$$

откуда

$$\alpha + \beta + \gamma = 6d - (a + b + c).$$

Такъ какъ эти соотношенія существуютъ, какъ бы ни были расположены точки A, B и C, или, что все равно, какъ бы ни были проведены три прямыя въ плоскости, оставимъ неподвижными линіи DG, EH и заставимъ линію IF проходить черезъ точку A (черт. **B**) такъ, чтобы она составляла съ EH тотъ же самый уголъ, какъ и въ первоначальномъ своемъ положеніи, или вообще,—такъ какъ этотъ уголъ произволенъ,—такъ, чтобы линія IF всегда шла внутри угла. Мы будемъ имѣть тогда

$$a + b + c = 4d.$$

Черт. B.

Слѣдовательно

$$\alpha + \beta + \gamma = 2d.$$

Можетъ быть, возразятъ на это, что хотя и имѣемъ по предположенію

$$b \text{ (черт. } \mathbf{A}) = b \text{ (черт. } \mathbf{B}),$$

но что равенство:

$$c \text{ (черт. } \mathbf{A}) = c \text{ (черт. } \mathbf{B})$$

должно быть доказано.

Мнѣ кажется однако, что, вслѣдствіе произвольной величины угловъ, въ этомъ доказательствѣ нѣтъ необходимости.

Таковы начала доказательства, о которомъ я жду вашего отзыва. Я прибавлю только въ оправданіе моего разсужденія, что, хотя второе дѣйствіе и уничтожаетъ треугольникъ ABC,

но оно не уничтожаетъ угловъ треугольника. Какъ бы ни были расположены линіи, всегда имѣемъ:

$$IBH = \beta,\ GCF = \gamma,\ DAE = \alpha,$$

какъ въ конечномъ треугольникѣ, такъ и въ исчезающемъ; сумма:

$$IAH + GAF + DAE$$

всегда равна, слѣдовательно, суммѣ угловъ прямолинейнаго треугольника.

Такимъ образомъ докажемъ предложеніе для произвольнаго треугольника (котораго углы суть A, B, C,), проводя линіи DG, EH такъ, чтобы было $a = A$, и дѣлая кромѣ того $IAH = B$ и $GAF = C$. Если бы тогда IAF оказалась не прямою, но ломаною линіею IAF', то уголъ c сдѣлался бы меньше на dc; но уголъ b сталъ бы на ту же величину больше, такъ что сумма этихъ угловъ осталась бы безъ перемѣны, и мы имѣли бы,—что намъ и требуется для доказательства,—равенство:

$$b + c \text{ (черт. A)} = b + c \text{ (черт. B)}.$$

Копенгагенъ, 3-го мая 1831 года.

Гауссъ къ Шумахеру.

Разсматривая внимательно то, что вы мнѣ пишете о теоріи параллелей, я замѣчаю, что *вы употребили въ вашихъ разсужденіяхъ, не выразивъ его явно*, слѣдующее предложеніе:

Если двѣ пересѣкающіяся прямыя, (1) и (2), образуютъ съ третьею прямою (3), ихъ встрѣчающею, соотвѣтственно углы A' и A'', и если четвертая прямая (4), лежащая въ той же плоскости, будетъ пересѣкать (1) подъ угломъ A', то та же прямая (4) будетъ пересѣкать (2) подъ угломъ A''.

Это предложеніе не только требуетъ доказательства, но можно сказать, что оно-то, въ сущности, и составляетъ ту теорему, о доказательствѣ которой идетъ рѣчь.

Вотъ уже нѣсколько недѣль, какъ я началъ излагать письменно нѣкоторые результаты моихъ собственныхъ размышленій

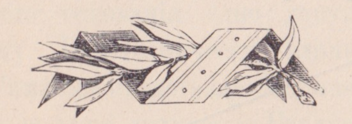
объ этомъ предметѣ, занимавшихъ меня сорокъ лѣтъ тому назадъ и никогда мною не записанныхъ, вслѣдствіе чего я долженъ былъ три или четыре раза возобновлять весь трудъ въ моей головѣ. Мнѣ не хотѣлось бы однако, чтобы это погибло вмѣстѣ со мною.

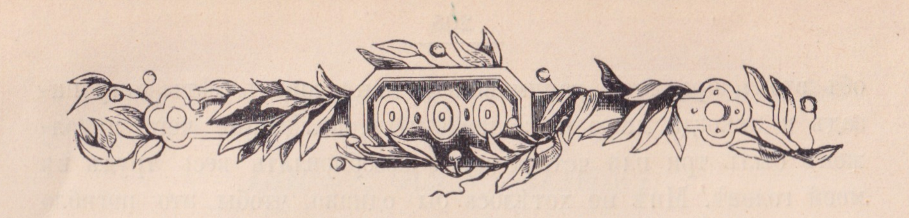
Гетингенъ, 17 мая 1831 года.

Отвѣтъ Гаусса типиченъ въ томъ отношеніи, что указываетъ на тотъ обыкновенный недостатокъ, которымъ страдали *всѣ* безъ исключенія попытки доказать постулатъ Евклида, или обойти его въ теоріи параллельныхъ линій. Вмѣсто этого постулата авторы вводили *незамѣтно* для самихъ себя какое-нибудь новое, нуждающееся въ доказательствѣ, предложеніе. Такъ было и съ Шумахеромъ.

Суть ошибки Шумахера еще лучше выяснится изъ дальнѣйшаго, гдѣ о суммѣ угловъ треугольника будетъ также приведенъ извѣстнаго рода «софизмъ».

Въ посмертныхъ бумагахъ Гаусса дѣйствительно нашлись небольшія замѣтки о не-Евклидовой геометріи (Сущность этихъ замѣтокъ изложена въ упомянутой уже нами «Не-Евклидовой Геометріи» Р. Бонолы). Но, какъ видно, обстоятельства не позволили Гауссу довести свой трудъ до конца.





Выясненіе трехъ постулатовъ о параллельныхъ линіяхъ.

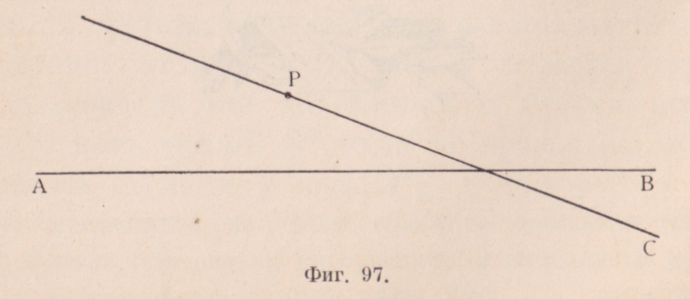
Въ противоположность постулату Евклида, о которомъ мы говорили въ главѣ «Два отрицательныхъ вывода XIX вѣка», Лобачевскій ставитъ иной, а именно:

Черезъ данную точку на плоскости можно провести неопредѣленно большое число линій, изъ которыхъ ни одна не пересѣчетъ данной въ той же плоскости линіи.

Въ то же время еще одинъ постулатъ нѣмецкаго геометра Риманна говоритъ, что

черезъ точку на плоскости нельзя провести такой линіи, которая не пересѣкала бы данной линіи въ этой плоскости.

Отправляясь отъ каждаго изъ этихъ допущеній въ отдѣльности, мы получимъ три различныхъ системы геометріи на плоскости. Различіе этихъ геометрій лучше всего выясняется на слѣдующемъ примѣрѣ:



Фиг. 97.

Пусть *AB* и *PC* (см. фиг. 97) будутъ двѣ прямыя линіи, лежащія въ одной и той же плоскости и неограниченно про-

должающіяся по обоимъ противоположнымъ направленіямъ. *AB* примемъ неподвижной и занимающей опредѣленное положеніе, а *PC* пусть вращается въ плоскости около точки *P*, напр., въ направленіи, принимаемомъ за положительное, т. е. обратно движенію часовой стрѣлки, и пусть *PC* сначала пересѣкаетъ *AB*, какъ указано на фиг. 97. При дальнѣйшемъ вращеніи линіи *PC*, точка пересѣченія уходитъ все далѣе и далѣе вправо, и здѣсь логически возможны три случая:

1) Вращающаяся линія перестаетъ пересѣкать неподвижную прямую *AB* съ одной стороны (напр., справа) и тотчасъ же непосредственно при продолженіи вращенія пересѣкаетъ эту линію съ противоположной стороны (слѣва); 2) или же линія *PC*, переставъ пересѣкать *AB* и продолжая вращаться въ нѣкоторой части плоскости до новаго пересѣченія, совсѣмъ не встрѣчается съ линіей *AB*; 3) или, наконецъ, наступитъ такой промежутокъ времени, въ продолженіе котораго обѣ линіи будутъ одновременно пересѣкаться въ двухъ противоположныхъ направленіяхъ.

Первая изъ этихъ возможностей даетъ геометрію Евклида, вторая—геометрію Лобачевскаго, а третья—геометрію Риманна.

Извѣстнымъ образомъ развиваемые и пріобрѣтаемые нами умственные навыки приводятъ къ тому, что всѣ три предыдущія допущенія мы послѣдовательно поясняемъ довольно своеобразнымъ путемъ, а именно съ помощью того *опытнаго* понятія о прямой линіи, какое мы уже имѣемъ о ней. Логически каждое изъ этихъ трехъ допущеній, повторяемъ, такъ же допустимо, какъ и другое. Съ этой точки зрѣнія, строго говоря, нѣтъ никакого основанія одно допущеніе (постулатъ) предпочитать другому. Психологически, однако же, выходитъ такъ, что гипотеза Риманна представляется начинающему совершенно недопустимою, и даже допущеніе Евклида менѣе понятно, чѣмъ допущеніе Лобачевскаго.

Интересный опытъ въ этомъ отношеніи былъ сдѣланъ американскимъ математикомъ Уайтомъ (White) со своими начинающими курсъ «нормальной школы» учениками. Онъ начертилъ на доскѣ рисунокъ, подобный фиг. 97, изложилъ простыми и немногими словами всѣ три допущенія и попросилъ каждаго изъ учениковъ высказать свое мнѣніе по поводу каждаго изъ посту-

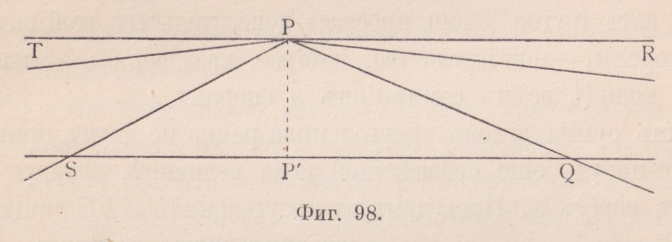
латовъ, записавъ свой отзывъ на клочкѣ бумажки. И вотъ оказалось, что 46 учениковъ (изъ общаго числа 54) высказались за вѣрность второго допущенія, т. е. постулата Лобачевскаго. Голоса этихъ 46 подѣлились такъ: 2 заявили, что они «догадываются», что должно быть такъ, а не иначе; 21,—что они «думаютъ» такъ, 13—въ этомъ «вполнѣ увѣрены», 10—«знаютъ» это. Что касается постулата Евклида, то за него высказались только остальные 8 изъ 54 учениковъ и при томъ такъ, что 6 изъ нихъ «думали», что это допущеніе правильно, а два были въ этомъ «вполнѣ увѣрены». Интересно отмѣтить обстоятельство, что среди этихъ не искусившихся еще ни въ какихъ софистическихъ изворотахъ умовъ не нашлось ни одного, который бы высказался за пріемлемость допущенія Риманна. Пониманіе его, очевидно, требуетъ нѣсколько болѣе повышеннаго математическаго развитія. Въ свою очередь, значительная часть сторонниковъ большинства, подавшаго голоса за 2-е предположеніе (Лобачевскаго), обнаружили склонность перемѣнить свое мнѣніе, какъ только они узнали, что это предположеніе сводится къ тому, что двѣ пересѣкающіяся прямыя могутъ быть одновременно параллельны одной и той же прямой. Во всякомъ случаѣ вышеизложенное свидѣтельствуетъ о томъ, что постулатъ Евклида не имѣетъ по формѣ характера убѣдительности даже для неискушеннаго ума.

Обращаясь къ *тригонометріи*, возьмемъ линію, дающую значеніе тангенсовъ центральнаго угла при возрастаніи этого угла отъ 0 до 90°. При величинѣ угла въ 90° тангенсъ его, какъ извѣстно, равенъ ∞ (безконечности). Но какъ только вращающаяся сторона угла перейдетъ хотя бы безконечно мало за (лѣвѣе) значеніе 90°, мы принимаемъ, что она тотчасъ же пересѣкается съ линіей тангенсовъ на безконечно далекомъ разстояніи, но въ противоположномъ направленіи (внизу), чѣмъ раньше. Это именно допущеніе и обосновываетъ, слѣдовательно, нашу тригонометрію на началахъ Евклида, а не иныхъ.

Знаменитый астрономъ Кеплеръ ввелъ опредѣленіе параллельныхъ, какъ *линій, встрѣчающихся въ безконечности*

Такимъ опредѣленіемъ можно пользоваться, пожалуй, даже въ элементарной геометріи. Необходимо только правильно понимать его и съ этой цѣлью перевести на языкъ такъ называемой *теоріи предѣловъ*.

Пусть линія (фиг. 98) PP' будетъ перпендикулярна къ SQ, и пусть точка Q движется все далѣе и далѣе вправо въ то время, какъ точка P остается неподвижной, и пусть, наконецъ, уголъ $P'PR$ будетъ предѣлъ, къ которому приближается уголъ $P'PQ$ при безпредѣльномъ возрастаніи разстоянія Q отъ P'. Въ



Фиг. 98.

такомъ случаѣ PR есть линія, параллельная SQ. То есть параллельность приписывается предѣльному положенію пересѣкающихся линій, когда точка пересѣченія уходитъ въ безконечность. Это понятіе мы и выражаемъ коротко извѣстными словами, что «параллельныя прямыя встрѣчаются въ безконечности».

Возвращаясь къ нашимъ тремъ постулатамъ, предположимъ (см. фиг. 98), что точка P неподвижна, а PS передвигается такъ, что точка S уходитъ безпредѣльно влѣво, при чемъ, при безпредѣльномъ возрастаніи $P'S$ уголъ TPP' будетъ предѣломъ для угла SPP'. Въ такомъ случаѣ TP есть линія, параллельная SQ. Итакъ:

Согласно съ постулатомъ Евклида PT и PR составляютъ одну прямую линію:

Согласно Лобачевскому, обѣ эти прямыя могутъ представлятъ и нѣкотортю ломаную линію.

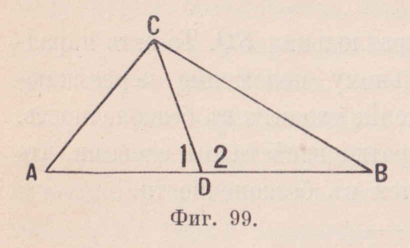
Наконецъ, по допущенію Риманна, Q и S не могутъ удалиться на безконечное пространство (но Q переходитъ, такъ сказать, чрезъ значеніе S опять къ P'), а это, по понятіямъ теоріи предѣловъ, не есть предѣльное положеніе и, слѣдовательно, не параллельная линія въ Евклидовскомъ смыслѣ этого слова.

Сумма угловъ треугольника.

Извѣстная теорема о суммѣ угловъ треугольника во всѣхъ учебникахъ геометріи доказывается на основаніи теоремъ о параллельныхъ линіяхъ. Но мы знаемъ уже (см. предыдущую главу), что въ теоріи параллельныхъ есть одно не могущее быть доказаннымъ допущеніе—знаменитый Евклидовъ постулатъ. Слѣдовательно, строго говоря, и теорема о суммѣ угловъ треугольника оказывается недоказанной.

Но вотъ другое «очень простое» доказательство этой важнѣйшей теоремы,—доказательство, которое, казалось бы, должно положить конецъ всѣмъ сомнѣніямъ и спорамъ.

Пусть сумма угловъ треугольника равна не двумъ прямымъ, а какой-нибудь еще неизвѣстной пока величинѣ, которую обозначимъ черезъ x. Проведемъ въ треугольникѣ ABC линію CD, соединяющую вершину C съ произвольной точкой основанія. Имѣемъ два новыхъ треугольника ADC и DBC. Сумма угловъ каждаго изъ нихъ равна x, а сумма этихъ суммъ $= 2x$. Ясно, что если отъ этой суммы отнять углы 1 и 2 (т. е. $2d$), то получится сумма угловъ треугольника ABC. Слѣдовательно, мы въ правѣ написать уравненіе



Фиг. 99.

$$2x - 2d = x,$$

откуда $x = 2d$, другими словами: *сумма угловъ треугольника равна двумъ прямымъ.*

Правильно ли это доказательство? Конечно, нѣтъ. Это не болѣе, какъ софизмъ, и мы сейчасъ укажемъ, гдѣ здѣсь кроется ошибка.

Ходъ доказательства совершенно вѣренъ, но съ самаго же начала сдѣлано было бездоказательное допущеніе. Вспомнимъ, что мы приравняли сумму угловъ всякаго треугольника неизвѣстной величинѣ x. Хотя, казалось бы, мы ничего этимъ не предрѣшаемъ, но на самомъ дѣлѣ мы утверждаемъ заранѣе, что

сумма угловъ *одинакова у всѣхъ треугольниковъ*,—другими словами, что она есть величина постоянная. Между тѣмъ въ этомъ-то и заключается весь вопросъ. Если бы было доказано, что у всѣхъ треугольниковъ, разной формы и размѣровъ, сумма угловъ остается постоянной, то ужъ не трудно было бы, какъ мы видѣли, доказать, что постоянная эта есть именно $2d$, а не какая-либо другая.

Итакъ, выше мы доказали не ту теорему, которую брались доказать, а иную:

Если сумма угловъ треугольника есть величина постоянная, то она равна $2d$.

Эта новая теорема, которую мы случайно и неожиданно для самихъ себя доказали, не совсѣмъ, однако, безполезна: она поможетъ намъ кое-что уяснить въ области не-Евклидовыхъ геометрій.

Для этого мы сначала перефразируемъ эту теорему,—выскажемъ то, что въ геометріи называется теоремой «обратной противоположной». Получимъ:

Если сумма угловъ треугольника не равна $2d$, то она не есть постоянная величина.

Какъ и всѣ «обратныя противоположной», теорема эта должна быть вѣрна, разъ вѣрна прямая теорема. Да и въ самомъ дѣлѣ, если бы сумма угловъ △-ка была величиной постоянной, то, согласно прямой теоремѣ, она равнялась бы $2d$,—что̀ противорѣчитъ условію.

Отсюда сразу получается очень важный выводъ. Мы знаемъ, что въ геометріи Лобачевскаго сумма угловъ треугольника меньше $2d$, а въ геометріи Риманна больше $2d$,—т. е. и въ томъ и другомъ случаѣ она *не равна* $2d$. Пользуясь нашей теоремой, мы заранѣе уже, не зная деталей этихъ не-Евклидовыхъ геометрій, можемъ утверждать, что въ этихъ геометріяхъ *сумма угловъ треугольника есть величина перемѣнная.* Въ этомъ-то непостоянствѣ суммы угловъ треугольника и заключается характерное отличіе упомянутыхъ не-Евклидовыхъ геометрій. Не то важно, что сумма угловъ △-ка больше или меньше $2d$, а то, что она вообще не есть величина постоянная.

Итакъ, вотъ чему научило насъ разсмотрѣніе приведеннаго выше софизма:

1) Въ Евклидовой геометріи сумма угловъ треугольника есть величина постоянная и равна $2d$.

2) Въ геометріи Лобачевскаго и Риманна сумма угловъ треугольника не есть величина постоянная.

Задача 68-я.

Нѣсколько «коварныхъ» вопросовъ.

Какое число дѣлится на всякое другое число безъ остатка?

*
* *

Можетъ ли дробь, въ которой числитель меньше знаменателя, быть равна дроби, въ которой числитель больше знаменателя? Если нѣтъ, то какъ же

$$\frac{-3}{+6}=\frac{+5}{-10}?$$

*
* *

Въ пропорціи:

$$+6:-3=-10:+5$$

каждый изъ крайнихъ членовъ не больше ли, чѣмъ каждый изъ среднихъ? Что же сдѣлалось съ извѣстнымъ намъ «правиломъ», что въ пропорціи «бо̀льшій членъ такъ относится къ меньшему, какъ бо̀льшій же къ меньшему»?

*
* *

Можно ли написать равенство, что

полуполный стаканъ = полупустому стакану?

*
* *

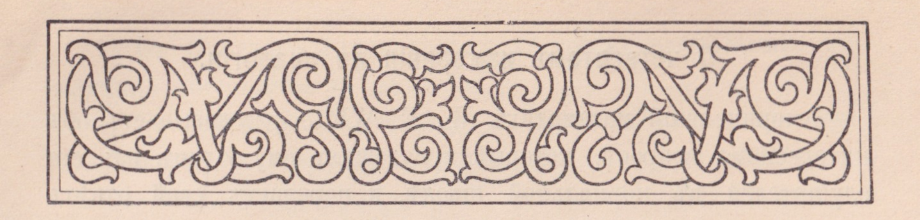
Есть ли на свѣтѣ люди съ одинаковымъ числомъ волосъ на головѣ?

О четвертомъ измѣреніи по аналогіи.

Американскій математикъ W. F. White разсказываетъ объ интересномъ вопросѣ, который предложилъ ему одинъ изъ его слушателей въ нормальной школѣ, и передаетъ свой отвѣтъ на него.

Вопросъ. Если слѣдъ движущейся точки (не имѣющей измѣреній) есть линія (одно измѣреніе), а слѣдъ движенія линіи есть поверхность (два измѣренія), наконецъ, слѣдъ движенія поверхности есть тѣло (три измѣренія),—то почему же не заключить, что слѣдъ движенія тѣла есть величина четвертаго измѣренія?

Отвѣтъ. Если бы ваши предположенія были вѣрны и совершенно точны, то по аналогіи могло бы быть вѣрнымъ заключеніе. Путь движущейся въ пространствѣ точки есть, дѣйствительно, линія. Слѣдъ движенія линіи даетъ поверхность, но *за исключеніемъ* случая, когда линія движется въ своемъ собственномъ измѣреніи,—скользитъ, такъ сказать, по своимъ собственнымъ слѣдамъ. Слѣдъ движенія поверхности даетъ тѣло, но только въ томъ случаѣ, когда поверхность движется не въ своихъ двухъ, а въ новомъ, третьемъ, измѣреніи. Образованіе величины четвертаго измѣренія движеніемъ тѣла предполагаетъ, слѣдовательно, наличность этого самаго новаго четвертаго измѣренія, по которому тѣло могло бы двигаться.



Въ странѣ чудесъ математики.

Во время своего пребыванія на курсахъ Елена полюбила математику и дѣлала въ ней большіе успѣхи. Одну изъ лекцій профессоръ какъ-то посвятилъ выясненію понятія о пространствѣ n-измѣреній, а незадолго передъ этимъ дома Елена прочла, по его совѣту, очень интересную небольшую книжечку «*Страна плоскости. Разсказъ изъ области многихъ измѣреній*».

Вернувшись съ занятій въ жаркое майское утро, молодая дѣвушка сѣла въ легкое кресло-качалку и съ удовольствіемъ отдыхала. Тихое покачиванье качалки навѣвало на нее легкое полузабытье, а въ головѣ мелькали одна за другой геометрическія фигуры: прямыя, кривыя линіи, круги... Въ послѣднее время среди студентовъ предметомъ упражненій и оживленныхъ обсужденій были кривыя линіи, носившія поэтическое названіе «цѣпей маргаритокъ».

— Какая она длинная, эта линія! думала Елена.—Пожалуй, что ей нѣтъ конца... Въ дѣтствѣ я читала книжку «Въ странѣ чудесъ» и помню, что послѣ того я нѣсколько ночей видѣла во снѣ, какъ путешествую по этой странѣ. Вотъ, если бы сдѣлаться опять маленькой дѣвочкой, попасть въ страну чудесъ и тамъ найти концы «маргариткиныхъ цѣпей». Но возможно ли это? У круга, напримѣръ, нѣтъ конца, какъ извѣстно. Можетъ быть, я пришла бы къ безконечнымъ вѣтвямъ кривой...

Вдругъ Елена очутилась на узенькой тропинкѣ, почти закрытой большими деревьями. Она пошла по тропинкѣ и скоро пришла въ большую тронную залу, гдѣ сидѣла прелестная женщина, похожая на фею или «богиню». Приблизясь къ трону, Елена вѣжливо поклонилась.

— Здравствуй, Елена! —привѣтливо сказала фея.

Еленѣ не показалось страннымъ, что прекрасной незнакомкѣ извѣстно ея имя.

— Тебѣ хочется побывать въ странѣ чудесъ?

— О да!—съ жаромъ отвѣтила Елена.

— Я дамъ тебѣ въ провожатые одного изъ моихъ придворныхъ,—сказала фея, махнувъ палочкой.

Тотчасъ же появился юноша въ костюмѣ пажа. Онъ преклонилъ колѣно передъ феей, затѣмъ привѣтливо поклонился Еленѣ.

— Вотъ, Роландъ,—сказала фея,—эта дѣвушка желаетъ итти въ страну чудесъ,—поручаю ее твоимъ заботамъ. Покажи ей все, чѣмъ она будетъ интересоваться.

Съ этими словами она передала свой волшебный жезлъ пажу и сама исчезла.

— Идемъ!—сказалъ пажъ, подавая руку Еленѣ и махнувъ жезломъ.

Въ ту же минуту они очутились въ совершенно новой своеобразной и удивительной мѣстности.

Все, что здѣсь существовало, тянулось только *въ длину*, но не имѣло ни толщины ни ширины. Измѣренія въ этихъ двухъ послѣднихъ направленіяхъ были совершенно невозможны: настолько предметы были тонки и узки. Живыя существа въ этой странѣ могли двигаться только по одной какой-либо линіи.

— О! я понимаю!—воскликнула Елена.—Это страна линій. Я читала о ней.

— Да,—сказалъ пажъ,—я только то и могу вамъ показать, о чемъ вы читали или думали.

Елена вопросительно посмотрѣла на его жезлъ.

— И это, въ самомъ дѣлѣ, великое чудо!—подтвердилъ пажъ.—Показывать вамъ такимъ нагляднымъ образомъ все, о

чемъ вы только думали, вѣдь и это волшебство! Но показывать вамъ то, о чемъ вы никогда и не думали даже, это было бы...

Елена не разслышала послѣдняго слова, и пажъ опять махнулъ жезломъ.

Они находились теперь въ мѣстѣ, откуда страна линіи была видна яснѣе. Елена протянула ладонь поперекъ линіи прямо противъ одного изъ движущихся по линіи странныхъ жителей. Онъ внезапно остановился. Она отняла руку. Но обитатель страны линій остолбенѣлъ отъ изумленія: какое-то таинственное тѣло, или, по его понятіямъ, *точка* внезапно появилась въ его пространствѣ и такъ же внезапно исчезла!

Еленѣ странно было видѣть, какъ вся жизнь обитателя страны линій заключена между двумя точками.

— Они никогда не обходятъ препятствій!—замѣтила она.

— Линія—это ихъ міръ... Міръ одного измѣренія...—сказалъ пажъ.—Какъ можетъ кто-либо выйти изъ своего міра, чтобы обойти вокругъ препятствія?

— Не могла ли бы я поговорить съ ними и разсказать о второмъ измѣреніи?

— Эти существа не имѣютъ второго измѣренія! — лаконически сказалъ пажъ.

— Хорошо! — смѣясь продолжала Елена. — Дѣйствительно, это такъ. Ну, а если они *случайно* выйдутъ изъ предѣловъ своего узкаго міра?

— Случайно,—съ изумленіемъ повторилъ пажъ.—Я думалъ, что вы болѣе философъ!

— Нѣтъ,—скромно возразила Елена,—я еще только школьная ученица.

— Но вы ищете знаніе и истину и любите ихъ. Развѣ это не значитъ быть философомъ?

— Правда,—согласилась Елена,—пожалуй, я могу считать себя философомъ. Но скажите, все-таки, какъ подобное существо можетъ получить точное понятіе о пространствѣ, отличномъ отъ того, въ которомъ заключено оно.

— Оно можетъ, вѣроятно, обратиться къ существу нѣсколькихъ измѣреній...

Елена на минуту пришла въ замѣшательство, думая, что ея проводникъ шутитъ. Но тотъ совершенно серьезно продолжалъ.

— Существа одного измѣренія могутъ почувствовать другое измѣреніе только при воздѣйствіи иныхъ существъ не изъ ихъ пространства. Но обратимся къ другому міру.

Пажъ снова махнулъ жезломъ, и они увидали новую область, всѣ обитатели которой имѣли длину и ширину, но не имѣли толщины.

— Это страна плоскостей!—весело сказала Елена, а чрезъ минуту прибавила:—но только я думала, что плоскостныя существа всѣ представляютъ собой правильныя геометрическія фигуры, а здѣсь я вижу очень разнообразныя.

Пажъ расхохотался такъ громко и заразительно, что Елена стала вторить ему, не зная еще причины его смѣха. Онъ объяснился.

— Вы представляли себѣ, значитъ, такую страну плоскостей, гдѣ государственные мужи похожи на однообразные правильные квадраты, и гдѣ остроуміе формъ есть принадлежность низшихъ, а однообразіе считается отличіемъ знатности. Да, есть и такая страна плоскостей, только пишется она съ прописной, а не съ маленькой буквы...

Елена стала присматриваться къ жизни существъ съ двумя измѣреніями и размышлять о ихъ сферѣ представленій. Она соображала, что многоугольники, круги и всякія другія плоскія фигуры всегда видны имъ только, какъ отрѣзки линій, что они не могутъ видѣть угла, но могутъ вывести заключеніе о его существованіи; что они могутъ быть заключены внутри четыреугольника или другой плоской фигуры, если она имѣетъ замкнутый периметръ, который они не могутъ пересѣчь; и если существо трехъ измѣреній пересѣкло бы ихъ пространство (поверхность), оно могло бы понять только сѣченіе на поверхности, сдѣланное этимъ трехмѣрнымъ тѣломъ, такъ что тѣло представлялось бы имъ существомъ также двухъ измѣреній, но обладающимъ чудесными свойствами и могуществомъ движенія.

Елена заинтересовывалась все больше и больше.

— Покажите мнѣ пространства еще и другихъ измѣреній!— просила она спутника.

— Хорошо! Пространство трехъ измѣреній вы можете видѣть во всякое время,—сказалъ пажъ, махнувъ жезломъ и измѣняя картину.—Но если вы возьмете мой жезлъ и съ его помощью покажете мнѣ пространство четырехъ измѣреній, то я буду вамъ очень благодаренъ!

— О, этого я не могу!—воскликнула Елена.

— И я тоже.

— А можетъ кто-нибудь это сдѣлать?

— Говорятъ, что въ пространствѣ четырехъ измѣреній можно видѣть внутренность нашего закрытаго ящика, смотря въ него изъ четвертаго измѣренія такъ, какъ вы могли видѣть внутренность прямоугольника въ странѣ плоскостей, смотря на него извнѣ, сверху внизъ. Говорятъ также, что въ четырехмѣрномъ пространствѣ не можетъ быть завязанъ узелъ. Существо этого четырехмѣрнаго пространства, переходя въ наше, должно казаться намъ существомъ трехъ измѣреній, такъ какъ все, что мы можемъ видѣть отъ такого существа, есть только сѣченіе, сдѣланное имъ въ нашемъ пространствѣ, и это сѣченіе есть то, что мы называемъ тѣломъ. Это существо можетъ представиться намъ, скажемъ, какъ человѣкоподобное. И оно можетъ быть, дѣйствительно, не менѣе человѣкомъ, чѣмъ мы, и не менѣе реальнымъ, а даже болѣе реальнымъ, если только слово «реальный» здѣсь приложимо. Существа страны плоскостей (двухъ измѣреній), пересѣкающія страну линій (пространство перваго измѣренія) кажутся обитателямъ линейнаго пространства существами одного измѣренія, только обладающими чудеснымъ могуществомъ. Точно также наше трехмѣрное тѣло въ плоскомъ (двухмѣрномъ) пространствѣ: пересѣченіе наше съ поверхностью—это и все, что видимо и понятно для существа плоскостного пространства, и только это пересѣченіе, только одна фаза нашего тѣла доступна существу двухъ измѣреній. Отсюда слѣдуетъ заключить, что существа болѣе чѣмъ трехъ измѣреній имѣютъ чудесную для насъ способность появляться и исчезать, входить и уходить изъ комнаты, гдѣ заперты всѣ двери, они могутъ казаться намъ «духами», хотя вмѣстѣ съ тѣмъ онѣ могутъ быть на самомъ дѣлѣ существами болѣе реальными, чѣмъ мы сами.

Онъ замолчалъ, а Елена замѣтила:

— Все, что вы сказали, есть только результатъ извѣстнаго рода логическихъ соображеній. Я хотѣла бы *видѣть* четырехмѣрное пространство.

Спохватившись, она сообразила, что такая настойчивость можетъ быть неделикатной по отношенію къ спутнику, и она прибавила:

—Но я знаю, что жезлъ не можетъ показывать намъ все, что мы захотѣли бы видѣть. Тогда не было бы предѣловъ нашему познанію.

— Можетъ быть, безпредѣльное познаніе есть то же, что и безконечное познаніе?—спросилъ пажъ.

— Это похоже на каламбуръ,—отвѣтила Елена.—Не есть ли это простая игра словъ?

— А вотъ идетъ господинъ Вычислителевъ. Спросимъ его мнѣнія.—Ей! Господинъ Вычислителевъ!

Елена увидѣла почтеннаго пожилого господина съ развѣвающейся бѣлой бородой. Онъ обернулся, когда услыхалъ свое имя.

Пока онъ приближался, пажъ сказалъ тихо Еленѣ:

— Онъ будетъ въ восторгѣ отъ такой ревностной ученицы, какъ вы. Это для него праздникъ.

Вычислителевъ съ большимъ достоинствомъ раскланялся съ Еленой и ея спутникомъ и, ознакомившись съ темой разговора, началъ такъ энергично высказывать свои мнѣнія, что пажъ остановилъ его:

— Осторожнѣе, это не спеціалистъ по математикѣ.

Еленѣ неособенно понравилось это замѣчаніе, такъ какъ она вообще не соглашалась, когда дѣвушекъ считали менѣе способными въ математикѣ, чѣмъ другихъ людей. «Ну, да это шутка!» подумала она про себя и продолжала слушать.

Вычислителевъ продолжалъ начатое поясненіе.

— Если вы хотите спросить, одно ли и то же безпредѣльно увеличивающееся перемѣнное и абсолютная безконечность, то я отвѣчу—*нѣтъ!* Безгранично, или безпредѣльно, увеличиваю-

щееся перемѣнное всегда ближе къ *нулю*, чѣмъ къ абсолютной *безконечности.* Для простоты поясненія сравнимъ такое перемѣнное съ другимъ однообразно измѣняющимся перемѣннымъ,—со временемъ. Предположимъ, что разсматриваемое нами перемѣнное удваивается каждую секунду. Въ такомъ случаѣ все равно,—какъ бы долго ни продолжалось подобное увеличеніе перемѣннаго, оно все-таки будетъ ближе къ нулю, чѣмъ къ безконечности.

— Поясните, пожалуйста,—попросила Елена.

— Хорошо! — продолжалъ Вычислителевъ. — Разсмотримъ значенія перемѣннаго въ нѣкоторый моментъ. Въ этотъ моментъ значеніе перемѣннаго равно только половинѣ того, которое оно пріобрѣтетъ черезъ секунду, и равно четверти того значенія, которое получится черезъ 2 секунды, если оно будетъ все возрастать. Такимъ образомъ *теперь*, въ данный моментъ, оно гораздо ближе къ нулю, чѣмъ къ безконечности. Но то, что вѣрно относительно перемѣннаго въ данный моментъ, будетъ вѣрно и въ слѣдующій и, вообще, въ каждый моментъ. И какъ бы перемѣнное ни возрастало, оно всегда будетъ ближе къ нулю, чѣмъ къ безконечности.

— Значитъ,—сказала Елена,—правильнѣе говорить «безпредѣльно увеличивается», вмѣсто «приближается къ безконечности, какъ къ предѣлу».

— Разумѣется! Перемѣнное не можетъ приближаться къ безконечности, какъ къ предѣлу. Учащимся часто напоминаютъ объ этомъ.

— Я думаю,—замѣтила Елена,—что знаніе можно увеличивать всегда, хотя это и кажется чудеснымъ.

— Что вы называете чудеснымъ?

— Потому что...—начала Елена и остановилась.

— Когда начинаютъ съ «потому что», рѣдко даютъ отвѣтъ!—сказалъ пажъ.

— Боюсь, что я дѣйствительно не отвѣчу, — произнесла Елена.—Обыкновенно называютъ чудеснымъ то, что является отступленіемъ отъ естественныхъ законовъ.

— Мы должны показать барышнѣ начертаніе кривой,—сказалъ Вычислителевъ пажу.

— Конечно,—отвѣтилъ тотъ. — Любите вы фейерверки? — спросилъ онъ Елену.

— Благодарю васъ,—отвѣтила Елена,—но я не могу остаться здѣсь до вечера.

— Хорошо, мы покажемъ вамъ ихъ очень скоро.

— Фейерверки при дневномъ освѣщеніи?—спросила Елена.

Но въ ту же минуту пажъ махнулъ жезломъ и наступила ночь, свѣтлая ночь, хотя безъ луны и звѣздъ.

Такъ какъ эта перемѣна была сдѣлана при помощи магическаго жезла, то Елена не очень была изумлена.

— Теперь вы мнѣ покажете начертаніе кривой? — спросила она.

— Да,—сказалъ пажъ.

Разговаривая такимъ образомъ, всѣ трое шли дальше, пока не подошли къ мѣсту, гдѣ находилось нѣчто въ родѣ электрической станціи подъ наблюденіемъ прелестной молодой женщины.

— Это Ана-Литика,—сказалъ Вычислителевъ Еленѣ,—вы, вѣроятно, съ ней знакомы.

— Знакомое имя сказала Елена, но я не припоминаю, чтобы видѣла гдѣ-нибудь эту госпожу. Мнѣ хотѣлось бы познакомиться съ ней.

Познакомившись, Елена назвала женщину «госпожа Литика».

Но та улыбнулась и сказала:

— Меня никогда такъ не зовутъ. Всѣ зовутъ меня обыкновенно «Ана-Литика».

— Эта барышня хотѣла бы познакомиться съ нѣкоторыми изъ вашихъ работъ,—сказалъ Вычислителевъ.

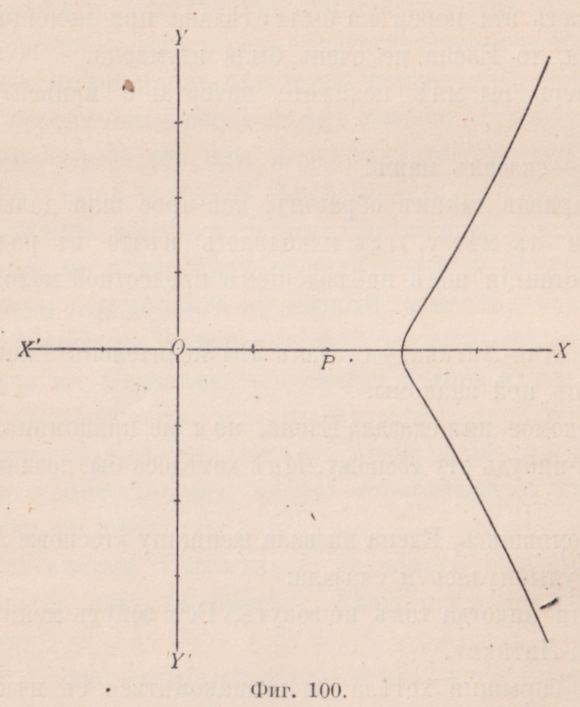
— Пиротехническое начертаніе кривой,—пояснилъ словоохотливый пажъ.

— Пожалуйста, покажите намъ алгебраическую кривую съ особенной точкой,—прибавилъ Вычислителевъ.

Ана-Литика тронула одну изъ кнопокъ, и сквозь темноту прорѣзалась полоса яркаго свѣта, образовавшая въ пространствѣ блестящую *плоскость*. Затѣмъ она поблекла, но остались два луча, перпендикулярныхъ одинъ къ другому. Изображеніе было слабое, но неизмѣняющееся.

— Это *оси координатъ*,—объяснила Ана-Литика.

Она нажала вторую кнопку, и Елена увидѣла нѣчто, похожее на метеоръ. Онъ явился изъ огромнаго отдаленія, пересѣкъ лучъ свѣта, который былъ названъ одной «изъ осей», и понесся по другую сторону этой оси такъ же быстро, какъ появился, все время двигаясь къ плоскости, показанной первоначальной исчезнувшей полосой свѣта. Елена невольно подумала о кометѣ. Но вмѣсто кометнаго блестящаго хвоста пронесшійся «метеоръ» оста-



Фиг. 100.

вилъ за собой неизмѣняемый путь свѣта въ видѣ кривой линіи. Ана-Литика близко подошла къ Еленѣ, и обѣ дѣвушки смотрѣли на блестящую кривую, которая тянулась сквозь темноту на все пространство, которое только было доступно зрѣнію.

— Какъ это красиво!—воскликнула Елена.

Попытка изобразить на бумагѣ то, что видѣла Елена, даетъ объ этомъ не столь сильное и эффектное представленіе. На фиг. 100-ой даны оси координатъ и самая кривая.

Вдругъ Елена воскликнула:

— Это, вѣдь, *отдѣльная точка свѣта?* При этомъ она показала на точку, обозначенную на фигурѣ буквой P.

— Это *точка кривой*,—сказала Ана-Литика.

— Но она такъ отдалена отъ всей остальной кривой!—замѣтила Елена.

Отойдя къ аппарату и дѣлая что-то, чего Елена не могла разсмотрѣть, Ана-Литика начала писать въ темнотѣ, словно на аспидной доскѣ. Знаки выходили блестящіе и рѣзко выдѣлялись на темномъ фонѣ ночи. Вотъ что̀ она писала:

$$y^2 = (x - 2)^2 (x - 3).$$

Отступя назадъ, она сказала:

— Это уравненіе кривой.

Елена любовалась горящимъ въ темнотѣ уравненіемъ.

— Я никогда не представляла себѣ геометрическія координаты столь красивыми,—сказала она.

— Точка, о которой вы спрашивали,—сказала Ана-Литика,— есть точка (2, 0). Вы видите, что она удовлетворяетъ уравненію. Это точка изображенія.

Елена теперь замѣтила, что единицы длины были намѣчены на слабо видныхъ осяхъ легкими болѣе блестящими точками свѣта.

— Да, сказала она, я вижу ее, но странно все-таки, что она отдалена отъ остальной кривой.

— Да,—сказалъ Вычислителевъ, который все время внимательно слушалъ,—вы ожидали, что кривая будетъ непрерывна. Непрерывность—вотъ постоянная предпосылка нынѣшней научной мысли. Эта точка кажется нарушающей законъ; она, слѣдовательно, есть то, что вы назвали нѣсколько минутъ тому назадъ «чудомъ». Если бы всѣ наблюдаемыя явленія, кромѣ одного, имѣли нѣкоторую видимую связь, мы были бы склонны назвать это одно «чудеснымъ», а все остальное естественнымъ. Если только то кажется удивительнымъ, что необычайно, то и «чудомъ» въ математикѣ слѣдовало бы называть всякій отдѣльный случай.

— Благодарю васъ,—сказала Елена,—я очень хотѣла бы согласиться съ этимъ. Но исключительность смущаетъ меня. Я хотѣла бы думать, что здѣсь есть общее царство закона.

— *Очевидно*,—сказалъ пажъ,—здѣсь исключеніе! *Ясно*, что здѣсь есть разныя альтернативы, какъ, напримѣръ, что точки нѣтъ на чертежѣ, что чертежъ имѣетъ единственную точку, *и такъ далѣе*...

Вычислителевъ, Ана-Литика и пажъ смѣялись. На вопросъ Елены пажъ пояснилъ:

— Мы часто говоримъ «очевидно» или «ясно», когда не можемъ дать объясненія, и часто говоримъ «и такъ далѣе», когда не знаемъ, какъ продолжать.

Елена сначала думала, что эта насмѣшка относится къ ней, но потомъ вспомнила, что она ни одного такого выраженія не употребила. Вообще, вѣдь, все это приключеніе съ ней была только шутка, а потому она успокоилась и стала спрашивать объ интересующихъ ее предметахъ.

— Разскажите мнѣ объ этой изолированной, особенной точкѣ,—обратилась она къ Вычислителеву.

Этотъ послѣдній обо всемъ говорилъ въ поучительномъ тонѣ, который былъ ему свойственъ.

Вычислителевъ. Если въ написанномъ выше уравненіи кривой $x = 2$, то, какъ видите, $y = 0$. Но для всякаго другого значенія x, меньшаго, чѣмъ 3, какое получится значеніе для y?

Елена. Такъ называемое *мнимое*.

Вычислителевъ. А какъ изображаются мнимыя числа геометрически?

Елена. Линіей, длина которой дается абсолютнымъ (или ариѳметическимъ) числомъ мнимаго количества, и направленіе которой перпендикулярно къ той, по которой отсчитываются положительныя и отрицательныя направленія.

Вычислителевъ. Хорошо. Въ такомъ случаѣ...

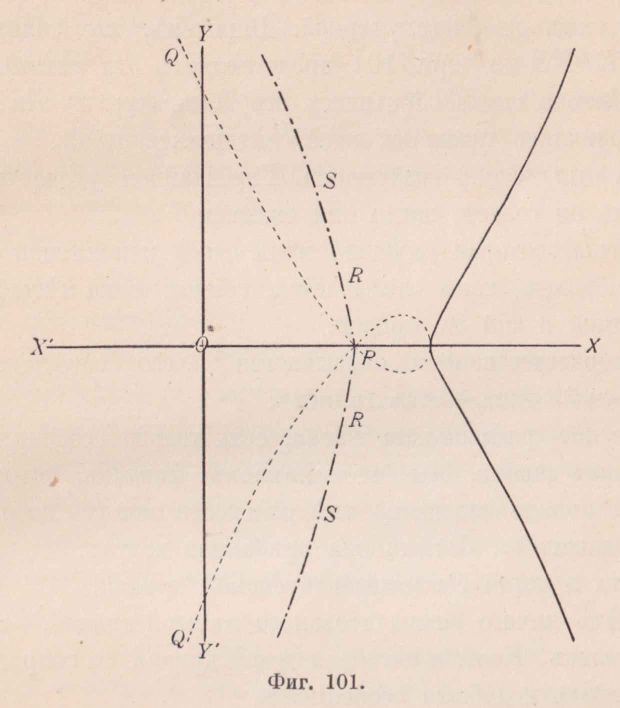
Елена (съ восторгомъ). О! Теперь я понимаю, я вижу. Здѣсь должны быть еще точки кривой внѣ плоскости.

Вычислителевъ. Вотъ именно. Здѣсь имѣются еще такъ называемыя мнимыя вѣтви кривой, и, можетъ быть, Ана-Литика будетъ настолько добра, что покажетъ ихъ намъ теперь.

Ана-Литика тронула еще кнопку своего аппарата, и другая блестящая кривая прорѣзалась на фонѣ ночного неба. Плоскость, опредѣляемая этой кривой, была перпендикулярна къ преды-

дущей плоскости (Обозначенная точками линія на фиг. 101 воспроизводитъ обыденнымъ образомъ то, что̀ видѣла Елена) [1]).

— О, я вижу! Повторила Елена. — Точка P не есть изолированная, отдѣльная, точка отъ кривой. Это точка, въ которой наша «мнимая» вѣтвь (на самомъ дѣлѣ столь же *дѣйствительная*, какъ и всякая другая) пересѣкаетъ плоскость двухъ осей координатъ.



Фиг. 101.

— Теперь, — сказалъ Вычислителевъ, — вмѣсто того, чтобы подставлять дѣйствительныя значенія для x и находить соотвѣтственныя значенія y, вы можете придавать дѣйствитель-

[1]) На этой фигурѣ пунктирная линія QPQ', если ее повернуть на 90° около xx', какъ оси, такъ, чтобы она была въ плоскости, перпендикулярной къ плоскости чертежа, изобразитъ «мнимую часть» чертежа.

Вычерченная точками и черточками линія $SRPRS$ представляетъ проэкцію на плоскость бумаги двухъ «комплексныхъ частей» кривой. Въ точкѣ P каждая вѣтвь находится въ плоскости бумаги, для каждой точки R соотвѣтствующія точки на самой вѣтви кривой находятся на разстояніи 0,7 отъ плоскости по ту и и другую сторону плоскости, для точки S соотвѣтствующія точки будутъ на каждой вѣтви въ разстояніи 1,5 отъ плоскости и т. д.

ныя значенія y и рѣшать уравненіе относительно x. И тогда, вообще, для каждаго значенія y вы получите 3 значенія x: одно дѣйствительное и 2 комплексныхъ сопряженныхъ числа. Кривая, проходящая черезъ всѣ точки съ комплексными абсциссами, никоимъ образомъ не лежитъ въ плоскости осей, но въ плоскости, имъ перпендикулярной. Впрочемъ, вы знаете это. (Линія *SRPRS* на черт. 101 представляетъ эти вѣтви).

Ана-Литика опять обратилась къ аппарату; и эти вѣтви кривой появились также въ видѣ свѣтящихся линій.

Елена была очень возбуждена. Глубочайшее удовлетвореніе звучало въ ея голосѣ, когда она сказала:

— Точка, которая смущала меня своей непонятной обособленностью, есть, какъ оказывается, *общая* точка нѣсколькихъ вѣтвей одной и той же кривой.

— Сверхестественное оказывается болѣе естественнымъ, чѣмъ что-либо иное,—сказалъ пажъ.

«Чудесное, размышляла Елена, есть только особенный случай высшаго закона. Мы не понимаемъ фактовъ, потому что связь ихъ иногда находится внѣ плоскости нашихъ наблюденій или размышленій». Затѣмъ она прибавила вслухъ:

— Это я могла бы назвать *чудесной кривой*.

— Нѣтъ ничего исключительнаго въ этой кривой,—сказалъ Вычислителевъ. Каждая алгебраическая кривая съ сопряженной точкой имѣетъ подобныя особенности.

Вычислителевъ сказалъ что-то Ана-Литикѣ, и она прикоснулась къ аппарату. Послышался сильный ударъ грома. Елена очутилась въ своей комнатѣ и, дѣйствительно, проснулась отъ сильнаго удара грома. Она приподнялась, стараясь припомнить все, что̀ съ ней было. Затѣмъ она сказала себѣ:

— Нѣтъ никакихъ кривыхъ изъ свѣта, пересѣкающихъ небеса. И пространства одного или двухъ измѣреній существуютъ только въ нашемъ умѣ. Они—абстракціи, какъ и пространство 4-хъ измѣреній. Но все-таки они мыслимы. Я рада, что видѣла такой сонъ. Воображеніе есть волшебный жезлъ. Предстоящая мнѣ жизнь будетъ настоящая страна чудесъ и..

Въ это время бой часовъ прервалъ ея мысли и напомнилъ, что пора идти на вечернія занятія.

Случай съ Пляттнеромъ.

Описанныя въ предыдущей главѣ сонныя грезы молодой курсистки, въ частности о возможности пространства, отличнаго отъ нашего, умѣстно будетъ дополнить здѣсь еще нѣкоторыми соображеніями о «пространствѣ четырехъ измѣреній». Читатель, надѣемся, прочтетъ эту главу съ тѣмъ большимъ интересомъ, что въ ней излагаются взгляды на четырехмѣрное пространство Генри Уэльса,—этого оригинальнѣйшаго и интереснѣйшаго писателя научныхъ романовъ-утопій. Произведенія Г. Уэльса поражаютъ какъ полетомъ фантазіи, такъ глубиной и логическимъ развитіемъ положенныхъ въ основаніе научныхъ мыслей или выводовъ.

Въ небольшомъ и почти неизвѣстномъ русскому читателю разсказѣ «Случай съ Пляттнеромъ» авторъ сквозь призму своего богатаго воображенія и тонкаго дисциплинированнаго ума освѣщаетъ «пространство четырехъ измѣреній» такъ, какъ оно ему представляется на основаніи послѣдняго слова математической науки. Утопіи такихъ писателей, какъ Г. Уэльсъ, заслуживаютъ, конечно, самаго серьезнаго вниманія: онѣ—результатъ серьезной работы мысли.

Суть разсказа «Случай съ Пляттнеромъ» состоитъ въ томъ, что нѣкій школьный учитель, Пляттнеръ, неожиданно для самого себя попалъ въ пространство 4-хъ измѣреній, пробылъ тамъ 9 дней и, наконецъ, такъ же неожиданно возвратился въ родное ему и намъ 3-мѣрное пространство. Не имѣя возможности, въ видахъ экономіи мѣста, привести весь разсказъ цѣликомъ, передаемъ по возможности связно его существенные моменты.

О томъ, какъ Пляттнеръ неожиданно попалъ въ пространство четырехъ измѣреній, повѣствуется слѣдующее. Учитель Пляттнеръ любилъ, между прочимъ, заниматься химическимъ анализомъ различныхъ веществъ. Одинъ изъ его учениковъ, Уиббль, интересовался химіей и постоянно приносилъ учителю различныя вещества для изслѣдованія. Разъ онъ принесъ ему гдѣ-то случайно найденную аптечную стклянку съ какимъ-то зеленымъ порошкомъ.

«Это было вечеромъ. Пляттнеръ сидѣлъ въ классѣ, надзирая за четырьмя учениками, оставленными для приготовленія уроковъ. Въ углу того же класса находился и маленькій шкапчикъ, содержавшій всѣ принадлежности для преподаванія химіи,—всю лабораторію школы, такъ сказать. Платтнеръ, которому надоѣло сидѣть безъ дѣла, очень обрадовался зеленому порошку и тотчасъ же занялся его анализомъ; а Уиббль наблюдать за этимъ процессомъ,—къ счастію,—издали. Четверо другихъ учениковъ, дѣлая видъ, что прилежно занимаются уроками, тоже исподтишка слѣдили за тѣмъ, что̀ творилось у шкапа.

«Всѣ они единогласно показываютъ, что Пляттнеръ отсыпалъ сначала немного порошка въ пробирный цилиндрикъ и попробовалъ растворить его послѣдовательно въ водѣ, хлористо-водородной, азотной и сѣрной кислотахъ. Не получивъ никакого результата, онъ высыпалъ почти половину всего порошка на металлическую пластинку и, держа стклянку въ лѣвой рукѣ, попробовалъ поджечь его спичкой. Порошокъ затлѣлся, сталъ плавиться... и вдругъ вспыхнулъ со страшнымъ взрывомъ!..

«Всѣ пятеро мальчиковъ, ожидавшіе съ замираніемъ сердца какой-нибудь катастрофы, какъ по камандѣ спрятались за парты и никто изъ нихъ не пострадалъ. Окно разлетѣлось вдребезги, классная доска упала; пластинка, на которой лежалъ порошокъ, превратилась, должно быть, въ пыль,—обломковъ ея нигдѣ не нашли, — штукатурка посыпалась съ потолка, но другихъ, болѣе важныхъ, поврежденій не оказалось. Когда прошла первая минута страха, мальчики поднялись изъ-за партъ и, не видя Пляттнера, думали, что онъ сбитъ съ ногъ и лежитъ на полу. Всѣ, конечно, поспѣшили къ нему на помощь, но были очень удивлены, когда не нашли его на полу. Оставалось предположить, что онъ, въ минуту общаго смятенія, выскочилъ изъ комнаты. Согласно такому предположенію, мальчики тоже побѣжали вонъ изъ класса, но передній изъ нихъ, Карсонъ, чуть не столкнулся въ дверяхъ съ хозяиномъ школы, мистеромъ Лиджетомъ.

«Мистеръ Лиджетъ—кривой, толстый и страшно раздражительный человѣкъ. Мальчики говорятъ, что онъ ворвался въ комнату, красный, растрепанный, съ цѣлымъ потокомъ своихъ

обычныхъ ругательствъ. «Балбесы», «сопляки», «паршивые щенки»—такъ и сыпалось изъ его устъ до тѣхъ поръ, пока буря не кончилась вопросомъ: «Гдѣ мистеръ Пляттнеръ?»

«Куда дѣвался мистеръ Пляттнеръ? Этотъ вопросъ былъ всѣми безпрестанно повторяемъ въ теченіе нѣсколькихъ слѣдующихъ дней, но отвѣтить на него никто не могъ. Мистеръ Пляттнеръ исчезъ, не оставивъ за собою никакого слѣда: ни капли крови, ни пуговицы отъ своего костюма! Точно будто онъ въ самомъ дѣлѣ разлетѣлся на атомы...»

Черезъ девять дней, однако, Пляттнеръ возвратился въ школу, но возвращеніе его было не менѣе странно, чѣмъ исчезновеніе:

«Въ среду вечеромъ, закончивъ дневные труды, мистеръ Лиджетъ собиралъ въ саду свою любимую ягоду, малину. Только-что онъ подошелъ къ особенно усыпанному ягодами кусту, какъ вдругъ сзади него послышался сильный трескъ, сопровождаемый какъ бы вспышкой молніи, и какое-то тяжелое тѣло такъ сильно толкнуло мистера Лиджета въ спину, что онъ упалъ на-корачки, малина разсыпалась, а шелковый картузъ съѣхалъ ему на глаза.

«Сильно разсерженный, мистеръ Лиджетъ, еще не успѣвъ подняться на ноги, выпустилъ цѣлую тучу ругательствъ по адресу неизвѣстнаго тѣла. Каково же было его изумленіе, когда, обернувшись назадъ, онъ увидалъ мистера Пляттнера, сидящаго среди куста малины, въ самомъ растерзанномъ видѣ—безъ шапки, безъ галстуха, въ грязной рубашкѣ и съ окрававленными руками!..»

Съ возвратившимся изъ неожиданнаго «путешествія» Готфридомъ Пляттнеромъ произошли, однако, весьма удивительныя перемѣны.

«Начать съ того, что, по изслѣдованію, произведенному опытнымъ врачомъ, всѣ внутренніе органы Готфрида Пляттнера оказались перемѣщенными: сердце перешло на правую сторону груди, печень смѣстилась къ лѣвому боку, а доли легкихъ помѣнялись мѣстами. Имѣя въ виду, что такое расположеніе внутренностей, хотя и не часто, но все же встрѣчается, ничѣмъ до поры до времени не проявляясь, я не придаю ему особеннаго значенія, такъ какъ оно могло существовать у Пляттнера

и раньше случившагося съ нимъ приключенія. Но вотъ что̀ важно и чего у Готфрида раньше этого приключенія положительно не было: онъ сталъ лѣвшой, и при томъ до такой степени, что правая его рука едва держала перо, а лѣвая могла писать только съ правой стороны къ лѣвой. Есть еще одно обстоятельство, указывающее на перемѣну, которая произошла въ организмѣ Готфрида Пляттнера. Раньше приключенія лицо его, какъ у большей части людей, было не совсѣмъ симметрично: правый глазъ былъ немножко больше лѣваго и правая щека массивнѣе лѣвой. Между тѣмъ теперь, послѣ приключенія, у Пляттнера лѣвый глазъ и лѣвая щека больше правыхъ, какъ я въ этомъ убѣдился изъ сравненія фотографій...»

Словомъ, — новое состояніе Пляттнера представляло собой *какъ бы зеркальное изображеніе нормальнаго человѣка.* Не менѣе интересно и то, что̀, по увѣреніямъ Г. Уэльса, Пляттнеръ разсказывалъ о собственныхъ своихъ субъективныхъ ощущеніяхъ.

«Пляттнеръ говоритъ, что послѣ взрыва почувствовалъ себя убитымъ наповалъ. Ноги его отдѣлились отъ пола, и все тѣло было отброшено куда-то назадъ, при чемъ онъ упалъ на спину. На минутку паденіе его ошеломило; затѣмъ онъ ясно ощутилъ запахъ жженыхъ волосъ и услышалъ голосъ мистера Лиджета,— однако, какъ сквозь сонъ.

«Все кругомъ казалось ему какъ бы въ туманѣ. Это онъ тотчасъ же приписалъ дыму, выдѣлившемуся во время взрыва. Фигуры Лиджета и учениковъ двигались въ этомъ туманѣ безшумно, какъ тѣни, но все же онъ ясно ихъ видѣлъ, видѣлъ обстановку класса и потому сообразилъ, что живъ и даже не особенно пострадалъ; только лицо саднило отъ ожога, да слухъ и зрѣніе нѣсколько притупились, вслѣдствіе взрыва, какъ онъ думалъ.

«Мало-по-малу Пляттнеръ приходилъ въ себя и собирался встать, какъ вдругъ былъ пораженъ неожиданнымъ и въ высшей степени страннымъ обстоятельствомъ: *два ученика, одинъ за другимъ, прошли сквозь его тѣло, какъ черезъ какой-нибудь туманъ или дымъ!* Ни одинъ изъ нихъ даже не чувствовалъ его присутствія. Трудно описать ощущеніе, испытанное Пляттнеромъ. Онъ вскрикнулъ отъ неожиданности.

«Попробовавъ протянуть руку, Пляттнеръ замѣтилъ, что, она свободно прошла сквозь стѣну дома.

«Стараясь обратить на себя вниманіе, Пляттнеръ громко звалъ Лиджета, ловилъ проходящихъ мимо мальчиковъ, но всѣ они, очевидно, совсѣмъ его не замѣчали. Онъ чувствовалъ себя какъ бы отрѣзаннымъ отъ міра, хотя и не переставалъ быть его частью. Всѣ попытки сообщаться съ этимъ міромъ оставались безплодными.

«Тогда Пляттнеръ сталъ внимательно осматривать все окружающее и съ удивленіемъ замѣтилъ, что онъ находится не въ классѣ, а подъ открытымъ небомъ и сидитъ на камнѣ, который обросъ бархатистымъ мохомъ. Склянка съ остатками зеленаго порошка находилась еще у него въ рукахъ. Совершенно безсознательно онъ сунулъ ее въ карманъ. Кругомъ было почти совсѣмъ темно.

«Тишина была абсолютная, несмотря на сильный вѣтеръ, который долженъ бы, казалось, сопровождаться шумомъ деревьевъ и травы. Всѣ окрестности казались скалистыми и пустынными.

«Попробовавъ спуститься по склону холма, Пляттнеръ свободно прошелъ сквозь стѣну школы и очутился въ залѣ верхняго этажа, гдѣ пансіонеры приготовляли свои уроки. Пляттнеръ замѣтилъ, что нѣкоторые изъ нихъ иголками царапаютъ на таблицахъ геометрическихъ чертежей полный ходъ доказательства соотвѣтствующей теоремы, о чемъ онъ прежде никогда не догадывался.

«Чѣмъ свѣтлѣе становилось, тѣмъ Пляттнеръ хуже видѣлъ земные предметы. Наконецъ, они совсѣмъ скрылись у него изъ глазъ. Судя по времени, надо думать, что это случилось какъ разъ тогда, когда зашло Солнце. Взамѣнъ того передъ его изумленнымъ взглядомъ рѣзко обрисовался скалистый и пустынный пейзажъ, надъ которымъ поднялся съ горизонта какой-то огромный зеленый дискъ, свѣтившій, однако же, гораздо слабѣе земного Солнца. Пляттнеръ стоялъ на высокомъ холмѣ. У ногъ его разстилалась глубокая долина, усѣянная камнями.

«Исчезновеніе земныхъ предметовъ при восходѣ зеленаго солнца въ пространствахъ четвертаго измѣренія есть странный и въ то же самое время самый интересный пунктъ въ показа-

ніяхъ Пляттнера. Онъ положительно говоритъ, что день въ этихъ пространствахъ соотвѣтствуетъ нашей ночи и, наоборотъ, ночь соотвѣтствуетъ дню, при чемъ самое сильное дневное освѣщеніе не достигаетъ силы нашего луннаго. Поэтому-то, можетъ быть, днемъ мы и не видимъ того, что́ происходитъ въ четвертомъ измѣреніи: у насъ въ это время сильный свѣтъ, а тамошніе пейзажи совсѣмъ не освѣщены.

«Когда зеленое солнце освѣтило окрестности, то Пляттнеръ увидалъ на днѣ долины цѣлую улицу, составленную изъ какихъ-то черныхъ зданій, похожихъ на гробницы и мавзолеи. Съ большимъ трудомъ спустившись по крутому каменистому и скользкому склону горы, Пляттнеръ встрѣтилъ цѣлую толпу какихъ-то существъ, расходившихся изъ одного большого зданія, какъ у насъ народъ расходится изъ церкви. Существа эти издали похожи были на шары, освѣщенные блѣдно-зеленымъ свѣтомъ. Одни изъ нихъ исчезали въ проходахъ, окружающихъ зданіе, другія входили въ дома, а нѣкоторыя стали подниматься на гору, навстрѣчу Пляттнеру. При видѣ ихъ послѣдній остановился въ изумленіи, хотя увѣряетъ, что нисколько не испугался. Впрочемъ, въ самомъ дѣлѣ, пугаться было нечего. Существа эти, которыхъ какъ бы несло вѣтромъ, представляли собой что-то въ родѣ головастиковъ: коротенькое, безрукое и безногое туловище и большая голова съ лицомъ совершенно человѣческой формы. Только глаза были, пожалуй, нѣсколько больше человѣческихъ и выражали, въ большинствѣ случаевъ, такую скорбь, такое страданіе, которыхъ человѣкъ трехъ измѣреній не могъ бы вынести. Приблизившись къ этимъ существамъ, Пляттнеръ замѣтилъ, что они смотрятъ совсѣмъ не на него, а на какіе-то движущіеся предметы.

«Каждое изъ нихъ какъ бы приставлено къ какому-нибудь изъ живущихъ въ трехъ измѣреніяхъ и внимательно слѣдитъ за всякимъ его шагомъ. Сначала эти существа не обращали на Пляттнера никакого вниманія, но потомъ два изъ нихъ, имѣвшихъ большое сходство съ его покойными отцомъ и матерью, стали слѣдить за нимъ по пятамъ. Онъ нѣсколько разъ пробовалъ заговорить съ матерью, но она только смотрѣла на него грустно, пристально и какъ бы съ какимъ-то упрекомъ. Впо-

слѣдствіи онъ сталъ встрѣчать и еще лица, напоминавшія ему людей, которыхъ онъ знавалъ въ дѣтствѣ и съ которыми входилъ въ какія-нибудь сношенія. Всѣ они тоже грустно смотрѣли на него, видимо узнавая и какъ бы упрекая въ чемъ-то.

«...День за днемъ, усталый, измученный, бродилъ Пляттнеръ, такъ сказать, на порогѣ между двумя мірами, ни къ одному изъ нихъ всецѣло не принадлежа.

«Въ концѣ-концовъ, это ему очень надоѣло, и онъ сталъ сильно желать возвращенія въ нашъ трехмѣрный міръ.

«На девятый день, вечеромъ, Пляттнеръ, ходя по улицамъ Суссексвиля, споткнулся о камень и упалъ на тотъ бокъ, гдѣ въ карманѣ его брюкъ лежала стклянoчка съ зеленымъ порошкомъ. Раздался страшный взрывъ,—и Пляттнеръ съ изумленіемъ увидалъ себя въ старомъ саду школы, лицомъ къ лицу съ мистеромъ Лиджетомъ!..»

Замѣчанія къ «Случаю съ Пляттнеромъ».

Разсказъ Уэльса не есть продуктъ «безпочвенной фантазіи», а скорѣе образчикъ живого *разсужденія по аналогіи*.

Мы, конечно, неспособны *представить* себѣ пространство четырехъ измѣреній. Такъ что описаніе, такъ сказать, внѣшняго вида этого пространства и его обитателей всецѣло оставляемъ на отвѣтственности мистера Пляттнера и его вдохновителя Генри Уэльса. Но *мыслить* о пространствахъ, отличныхъ отъ нашего, мы можемъ, какъ можемъ дѣлать болѣе или менѣе вѣроятныя заключенія о такихъ пространствахъ — по аналогіи. Аналогія, конечно, не доказательство, но иногда она можетъ привести къ любопытнымъ и даже полезнымъ соображеніямъ. Остроумный починъ въ этомъ отношеніи сдѣланъ такими глубокомысленными учеными, какъ Гельмгольцъ и Риманнъ, которые для примѣра взяли болѣе понятное и простое для насъ идеально плоское пространство—«пространство *двухъ* измѣреній», въ которомъ живутъ, движутся и мыслятъ существа тоже, конечно, двухъ измѣреній. Такое пространство можно (приблизительно, впрочемъ) мыслить, какъ огромный листъ не имѣющей толщины бумаги, покрытый множествомъ «живыхъ» линій,

треугольниковъ, квадратовъ и другихъ фигуръ, движущихся въ плоскости листа. Движеніе это можетъ происходить, понятно, только въ самой одной этой плоскости, такъ какъ третьяго измѣренія нѣтъ, и потому фигуры здѣсь не могутъ ни подыматься, ни опускаться внѣ плоскости. Обитатели такого плоскаго міра, поэтому, не могутъ имѣть ни малѣйшаго представленія о движеніи еще въ одномъ—перпендикулярномъ направленіи и такъ же прикованы тѣломъ и мыслью къ своему двухмѣрному пространству, какъ мы — къ нашему трехмѣрному міру. Самая идея третьяго измѣренія была бы имъ столь же чужда, какъ многимъ изъ насъ идея пространства 4-хъ измѣреній.

Каковы, напримѣръ, жилища обитателей такого плоскаго міра? Это не что иное, какъ замкнутыя линіи, открытыя сверху и снизу. Но будемъ помнить, что «верхъ» и «низъ» понятны только для насъ, существъ трехъ измѣреній; обитателямъ же двухмѣрнаго міра эти понятія чужды, и они считаютъ свои жилища прекрасно защищенными со всѣхъ сторонъ. Чтобы заключить обитателя плоскаго міра въ тюрьму, достаточно было бы начертить вокругъ него замкнутую линію. Будучи самъ плоскостью, линіей или точкой и не имѣя возможности выйти изъ плоскости, онъ не можетъ ни перешагнуть черезъ стѣны своей тюрьмы, ни подлѣзть подъ нихъ, и онѣ были бы для него непроницаемы, какъ для насъ каменныя и желѣзныя стѣны съ поломъ и потолкомъ.

Предположимъ, что этотъ міръ о двухъ измѣреніяхъ помѣщенъ въ самой серединѣ нашего міра о трехъ измѣреніяхъ. Обитатели плоскаго міра, все же, не имѣли бы ни малѣйшаго понятія о трехмѣрномъ пространствѣ, ихъ окружающемъ. Они просто не замѣчали бы всего нашего міра и даже склонны были бы отрицать самое его существованіе. Если бы кто-нибудь изъ нашего міра попалъ въ ихъ плоскость, они могли бы узнать, пожалуй, о существованіи другого міра. Но, конечно, такой пришелецъ казался бы имъ существомъ сверхъестественнымъ.

Въ самомъ дѣлѣ, попробуемъ представить себѣ ощущенія обитателя «плоскаго» міра, когда онъ вдругъ замѣчаетъ у себя въ спальнѣ, скажемъ, человѣка изъ нашего міра. Онъ, ложась спать, убѣдился въ прочности запоровъ на случай ночного

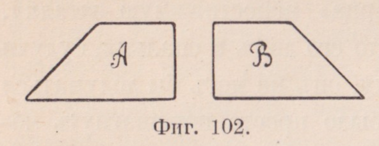
вторженія грабителя. И вдугъ, его изумленному взору представляется чудесная фигура, не похожая ни на что видѣнное имъ до сихъ поръ. Наше трехмѣрное тѣло *не было бы видимо* плоскимъ существамъ въ обычномъ своемъ образѣ, и при малѣйшемъ движеніи вверхъ оно совсѣмъ исчезало бы изъ виду— къ великому изумленію «двухмѣрца»,—такъ мы будемъ называть это существо двухъ измѣреній. Но все время, пока человѣкъ находился бы въ пересѣченіи съ плоскимъ міромъ, онъ былъ бы видимъ для «двухмѣрца» въ видѣ плоской фигуры, обладающей непостижимой способностью измѣнять свой видъ и чудесной силой движенія.

Самый способъ, какимъ неожиданный гость проникъ въ его домъ, составлялъ бы для «двухмѣрца» непостижимую загадку, настоящее чудо. Не подозрѣвая, что его домъ и спальня, будучи плоскими фигурами, открыты сверху, онъ не могъ бы додуматься до того, что человѣку достаточно было просто перешагнуть черезъ линію, чтобы очутиться въ его домѣ.

Его удивленіе не имѣло бы границъ, когда таинственный пришелецъ сталъ бы перечислять содержимое его кармановъ, шкафовъ, бюро, кассы, описывать внутренніе органы тѣла двухмѣрца и даже доставать изъ наглухо запертыхъ ящиковъ (наглухо для двухмѣрца, конечно) любую вещь. Двухмѣрецъ вообразилъ бы, что пришелецъ умѣетъ проникать черезъ стѣны, что для него недѣйствителенъ законъ непроницаемости матеріи, Мало того,—«трехмѣрному» гостю ничего не стоило бы, глядя поверхъ двухмѣрныхъ стѣнъ, описать самымъ подробнымъ образомъ, что творится въ сосѣднихъ, также наглухо запертыхъ, домахъ, и даже далеко за горами и морями плоскаго міра. Двухмѣрецъ при этомъ рѣшилъ бы, конечно, что его гость одаренъ даромъ ясновидѣнія и т. д.

Итакъ, разсуждая логически, нѣтъ ничего страннаго въ допущеніи пространства со свойствами, отличными отъ нашего, «Евклидовскаго», пространства. Ничего нѣтъ страннаго въ *мыслимости* пространства четырехъ измѣреній, если только разсужденія о немъ не шагаютъ за предѣлы логики и даже здраваго смысла.

Упомянемъ еще о такихъ весьма интересныхъ примѣрахъ, какъ симметрія и выворачиваніе на изнанку. Еще великій философъ и математикъ Кантъ обратилъ вниманіе на нѣкоторую, словно бы, «тайну», связанную съ такимъ, казалось бы, простымъ предметомъ, какъ симметрія. Сравните вашу правую и лѣвую руки,—онѣ совершенно сходны во всѣхъ подробностяхъ. А между тѣмъ всякій хорошо знаетъ, что эти, казалось бы, тождественныя тѣла несовмѣстимы, и правая перчатка не можетъ быть надѣта на лѣвую руку. Запомнивъ это, пойдемъ далѣе и разсмотримъ свойства симметричныхъ плоскихъ фигуръ. Вотъ передъ нами два симметричныхъ четырехугольника A и B (фиг. 102). Про нихъ нельзя сказать, что они несовмѣстимы. Правда, если просто *надвигать* B на A, то никакъ не удастся ихъ совмѣстить, но стоитъ перевернуть B, такъ сказать, на лѣвую сторону, на изнанку,—и тогда обѣ фигуры не трудно будетъ привести къ совмѣщенію. Прослѣдимъ, что собственно, мы сдѣлали. Для того, чтобы превратить фигуру B въ A, намъ необходимо было на время оторвать ее отъ плоскости, перенести въ міръ трехъ измѣреній и снова вернуть ее на плоскость.



Фиг. 102.

Но сколько бы мы ни поворачивали правую руку, мы никогда не превратимъ ее въ лѣвую. Отчего это? Да оттого, что для этого намъ нужно вывести руку за предѣлы трехмѣрнаго пространства, — совершенно такъ же, какъ мы только что вынесли нашъ четырехугольникъ изъ двухмѣрной плоскости въ міръ трехъ измѣреній. Не покидая же нашего міра, мы такъ же не можемъ совмѣстить симметричныя тѣла, какъ «двухмѣрцы» не въ состояніи совмѣщать плоскихъ симметричныхъ фигуръ. Отсюда замѣчательный выводъ: если бы человѣкъ былъ способенъ хотя на мгновеніе покинуть нашъ трехмѣрный міръ, онъ могъ бы вернуться къ намъ въ видѣ, симметричномъ самому себѣ: его правая рука сдѣлалась бы лѣвой, сердце и желудокъ перемѣстились бы на правую сторону, а печень — на лѣвую. Словомъ, каждая частица его тѣла была бы перемѣщена,— и все

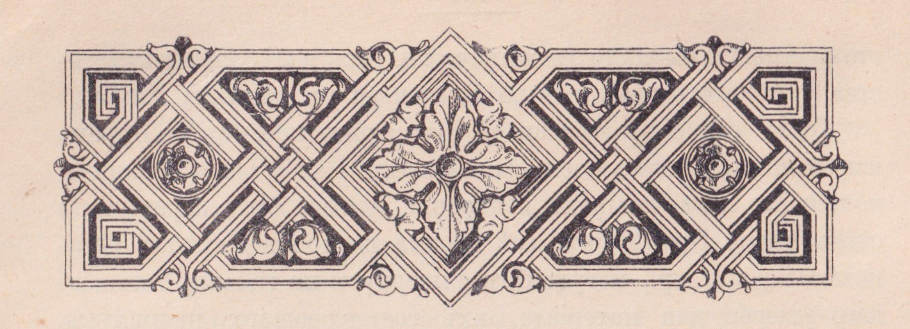
это произошло бы чисто геометрически, безъ малѣйшаго разстройства организма—какъ у м-ра Пляттнера въ разсказѣ Уэльса.

То же самое произошло бы со всякимъ предметомъ о трехъ измѣреніяхъ, даже съ очень массивнымъ. Наибольшая пирамида, попавъ въ міръ четырехъ измѣреній, можетъ быть перевернута очень легко. Кромѣ того, всѣ пустыя внутри вещи, какъ резиновые мячи и пр., могутъ быть вывернуты на изнанку безъ всякаго ущерба для матеріала, ихъ составляющаго; напримѣръ, перчатка правой руки, послѣ путешествія въ четвертомъ измѣреніи, возвратилась бы перчаткой лѣвой руки, и наоборотъ.

Таковы нѣкоторыя логическія заключенія, «по аналогіи», о пространствѣ 4-хъ измѣреній.

И читатель теперь, надѣемся, вполнѣ убѣдится, насколько уже не фантастически, а аналого-логически, если можно такъ выразиться, правъ Генри Уэльсъ во многихъ существенныхъ частяхъ своего разсказа.

Взрывъ зеленаго порошка понадобился автору потому, что только *посторонней силой* можно существо какого-либо пространства перенести въ другое пространство. Дѣлается также понятнымъ, почему организмъ Пляттнера послѣ «путешествія» сдѣлался собственнымъ своимъ «зеркальнымъ изображеніемъ». «Понятно», почему Пляттнеръ получилъ способность проходить сквозь стѣны нашихъ домовъ. «Понятно», пожалуй, даже и то, что сквозь его тѣло проходили его ученики. Словомъ, теперь понятны многія остроумныя детали разсказа. Непонятно, пожалуй, какъ это такъ, все же, у Пляттнера сохранилась сначала въ рукахъ (а не прошла черезъ тѣло) сткляночка съ остатками зеленаго порошка? Какъ, потомъ, она могла удержаться въ его карманахъ... Ну, да это, какъ и «описаніе» внѣшности міра 4-хъ измѣреній, уже всецѣло оставляется на отвѣтственности остроумнаго автора. Во всякомъ случаѣ разсказъ его—замѣчательный и единственный въ своемъ родѣ разсказъ.



Математика въ природѣ.

«Золотое дѣленіе».

Подъ названіемъ «золотого дѣленія», «золотого сѣченія» или даже «божественнаго дѣленія» у древнихъ геометровъ было извѣстно дѣленіе «въ крайнемъ и среднемъ отношеніи», вошедшее теперь во всѣ наши школьные учебники. Напомнимъ, въ чемъ оно состоитъ.

Раздѣлить данную величину *«въ крайнемъ и среднемъ отношеніи»*, значитъ раздѣлить ее на такія двѣ неравныя части, чтобы бо̀льшая относилась къ меньшей, какъ вся величина относится къ бо̀льшей части. Въ алгебраическихъ символахъ это выразится такъ. Если a есть величина, подлежащая дѣленію, а x и $a - x$ искомыя части (бо̀льшая и меньшая), то между величинами a, x и $a-x$ должна существовать слѣдующая пропорціональная зависимость:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{a - x},$$

т. е. x есть среднее геометрическое между a и $a-x$. Изъ этой пропорціи легко опредѣлить и значеніе x. По свойству пропорціи имѣемъ:

$$x^2 = a(a-x),$$

откуда

$$x^2 + ax - a^2 = 0.$$

Рѣшивъ это квадратное уравненіе, получаемъ, что

$$x_1 = a\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

$$x_2 = -a\frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

Условію задачи непосредственно удовлетворяетъ лишь первый корень. Отрицательный корень также имѣетъ извѣстное значеніе, но мы его здѣсь разсматривать не будемъ.

Итакъ, запомнимъ, что бо̀льшая часть величины a, раздѣленной въ крайнемъ и среднемъ отношеніи, равна ирраціональному выраженію $a\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Отношеніе этой части къ цѣлому, т. е. $a\frac{\sqrt{5}-1}{2} : a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Таково же, согласно пропорціи, должно быть и отношеніе меньшей части къ большей. Если мы пожелаемъ вычислить это выраженіе, то получимъ безконечную непеto ріодическую дробь:

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} = \mathbf{0{,}61804.....}$$

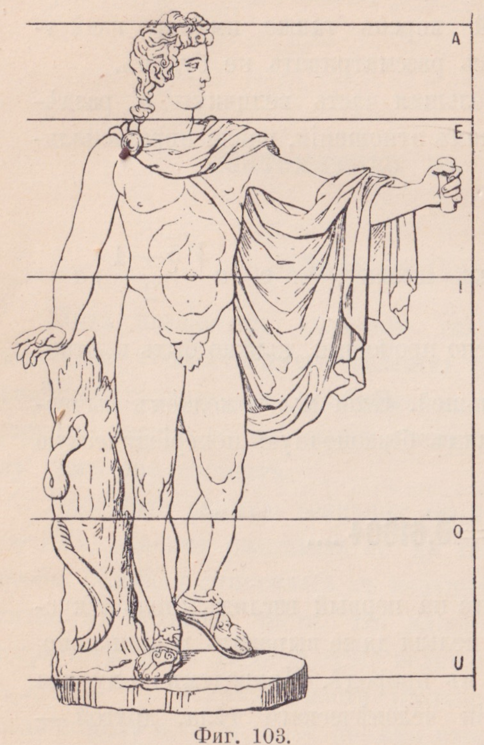
И вотъ оказывается, что эта на первый взглядъ столь искусственная пропорція, которую нельзя даже выразить раціонально, имѣетъ широкое примѣненіе въ природѣ. Приведемъ тому два примѣра—одинъ изъ анатоміи человѣческаго тѣла, другой—изъ морфологіи[1]) растеній.

Что части красиво сложеннаго человѣческаго тѣла отвѣчаютъ извѣстной пропорціи—это всякій знаетъ: недаромъ мы говоримъ о «пропорціонально» сложенной фигурѣ. Но далеко не всѣ знаютъ, что здѣсь имѣетъ мѣсто именно та пропорція, которую древніе называли золотымъ дѣленіемъ. Античныя статуи—лучшее доказательство того, что древніе ваятели хорошо знали о примѣненіи золотого дѣленія къ расчлененію человѣческаго тѣла.

---

[1]) Отдѣлъ ботаники, носящій названіе «морфологіи», изучаетъ строеніе органовъ растеній и, слѣд., соотвѣтствуетъ анатоміи животныхъ.

Идеально сложенное человѣческое тѣло, можно сказать, всецѣло построено на принципѣ золотого дѣленія. Если высоту хорошо сложенной фигуры раздѣлить въ крайнемъ и среднемъ отношеніи, то линія раздѣла придется какъ разъ на высотѣ таліи, или, точнѣе, пупка. Особенно хорошо удовлетворяетъ этой пропорціи мужская фигура,—и художники давно знаютъ, что, вопреки общему мнѣнію, мужчины красивѣе сложены, нежели женщины.

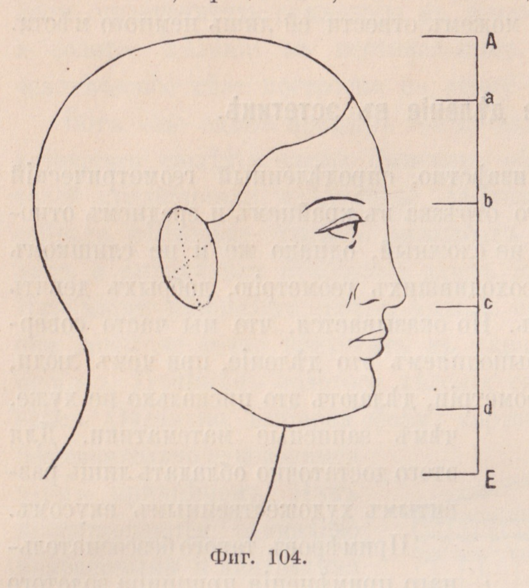


Фиг. 103.

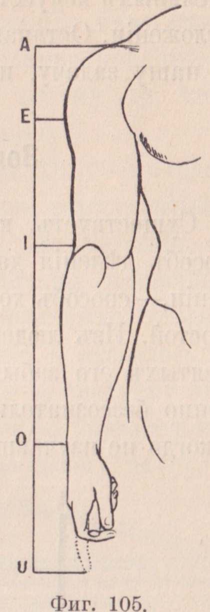
На любой античной статуѣ можно провѣрить этотъ своеобразный законъ. Но дѣло этимъ не ограничивается. Если каждую изъ полученныхъ частей въ свою очередь раздѣлить въ крайнемъ и среднемъ отношеніи, то линія раздѣла пройдетъ опять таки въ вполнѣ опредѣленныхъ (анатомически) пунктахъ: на высотѣ такъ наз. Адамова яблока и надколѣнныхъ чашекъ. На фигурѣ 103 обозначено расчлененіе статуи Аполлона Бельведерскаго: *I* дѣлитъ всю высоту *AU* фигуры въ кр. и ср. отношеніи; линія *E* дѣлитъ точно такъ же верхнюю часть туловища (короткая часть вверху), а линія *O*—нижнюю часть (короткая часть внизу).

Но и это еще не все. Каждая отдѣльная часть тѣла—голова, рука, кисть и т. д. также расчленяется на естественныя части по закону золотого дѣленія. Раздѣливъ въ крайнемъ и среднемъ отношеніи самую верхнюю изъ полученныхъ прежде частей (см. фиг. 104), мы убѣдимся, что раздѣлъ придется на линіи бровей (*b*); при дальнѣйшемъ дѣленіи образовавшихся частей получимъ послѣдовательно: кончикъ носа (*c*), кончикъ подбородка (*d*) и т. д.

Рука (фиг. 105) при расчлененіи согласно принципу золотого дѣленія распадается на свои анатомическія части—плечо, предплечье, кисть. Послѣд-



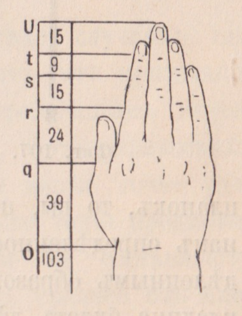
Фиг. 104.



Фиг. 105.

няя въ своемъ расчлененіи также отвѣчаетъ этому принципу (фиг. 106)—и т. д.

Если бы съ самаго начала мы раздѣлили тѣло человѣка въ крайнемъ и среднемъ отношеніи такъ, чтобы меньшая часть была не вверху, а внизу, то оказалось бы, что линія раздѣла проходитъ черезъ концы свободно свисающихъ рукъ [1]). Словомъ, расчлененіе наружныхъ формъ правильно сложеннаго человѣческаго тѣла подчиняется до мельчайшихъ частей принципу золотого дѣленія. Этотъ замѣчательный законъ былъ хорошо извѣстенъ древнимъ, но честь воскрешенія его принадлежитъ нѣмецкому ученому Цейзингу, который въ половинѣ прошлаго столѣтія выпустилъ книгу, спеціально посвященную примѣненію золотого дѣленія въ природѣ и эстетикѣ,—ибо оказывается, что



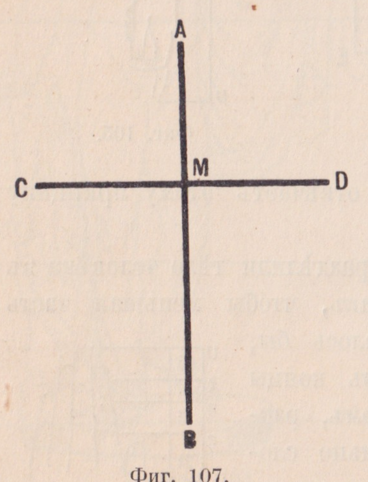
Фиг. 106.

[1]) Ранке, «Человѣкъ»; Проф. Брандтъ, «Антропологическіе очерки».

тотъ же законъ въ широкихъ рамкахъ примѣнимъ и въ изобразительныхъ искусствахъ, и въ архитектурѣ, и музыкѣ и даже стихосложеніи. Останавливаться на этой интересной темѣ не входитъ въ нашу задачу, и мы можемъ отвести ей лишь немного мѣста.

Золотое дѣленіе въ эстетикѣ.

Существуетъ, какъ извѣстно, опредѣленный геометрическій способъ дѣленія даннаго отрѣзка въ крайнемъ и среднемъ отношеніи,—способъ хотя и не сложный, однако же и не слишкомъ простой. Изъ людей, проходившихъ геометрію, добрыхъ девять десятыхъ его забываютъ. Но оказывается, что мы часто совершенно безсознательно выполняемъ это дѣленіе, при чемъ люди, никогда не изучавшіе геометріи, дѣлаютъ это нисколько не хуже, чѣмъ записные математики. Для этого достаточно обладать лишь развитымъ художественнымъ вкусомъ.



Фиг. 107.

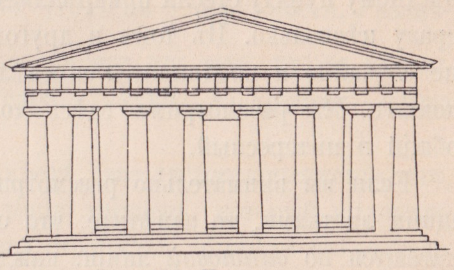
Примѣровъ такого безсознательнаго примѣненія принципа золотого дѣленія можно привести сколько угодно. Возьмемъ хотя бы обыкновенный крестъ. Всѣ замѣтили, вѣроятно, что фигура эта гораздо изящнѣе, если меньшая перекладина помѣщается не ровно по серединѣ большей, а немного повыше.

Если бы вамъ предложили самимъ устроить крестъ изъ двухъ планокъ, то вы, послѣ нѣсколькихъ пробъ, придали бы ихъ длинамъ опредѣленное отношеніе и расположили бы вполнѣ опредѣленнымъ образомъ. Окажется при этомъ, что меньшая перекладина будетъ дѣлить большую въ крайнемъ и среднемъ отношеніи. Другими словами, вы совершенно безсознательно примѣнили здѣсь пропорцію золотого дѣленія: отрѣзки AM, MB и AB (см. фиг. 107) будутъ удовлетворять пропорціи:

$$AM : MB = MB : AB.$$

Любопытно однако, что части меньшей перекладины должны быть равны, чтобы удовлетворять чувству изящнаго. На этомъ примѣрѣ очень ясно обнаруживается свойственная намъ склонность предпочитать симметрію въ горизонтальномъ направленіи и золотое дѣленіе въ вертикальномъ. Не потому ли, что и человѣческое тѣло построено по этому принципу?

Вотъ еще одинъ примѣръ той же категоріи. Въ 60-хъ годахъ истекшаго столѣтія члены Рижскаго общества естествоиспытателей предприняли слѣдующее любопытное изслѣдованіе: они собрали нѣсколько тысячъ визитныхъ карточекъ различныхъ лицъ и опредѣлили отношеніе длинъ ихъ неравныхъ сторонъ. Изъ многочисленныхъ цифръ вывели среднюю и оказалось, что она довольно точно подходитъ къ «крайнему и среднему отношенію». Принципъ золотого дѣленія сказался, слѣдовательно и здѣсь. Очевидно, выбирая форму карточки по своему вкусу, мы безсознательно руководимся этимъ принципомъ. Намъ представляются одинаково некрасивыми и квадратная и слишкомъ удлиненная прямоугольная форма — и та и другая грубо нарушаетъ пропорцію золотого дѣленія.



Фиг. 108. Парѳенонъ.

То же наблюдается и во многихъ другихъ случаяхъ, гдѣ прямоугольная форма предмета не зависитъ отъ притязаній практики и можетъ свободно подчиняться требованіямъ вкуса. Прямоугольная форма книгъ, бумажниковъ, фотографическихъ карточекъ, рамокъ для картинъ — болѣе или менѣе точно удовлетворяетъ пропорціи золотого дѣленія. Даже такіе предметы, какъ столы, шкафы, ящики, окна, двери — не составляютъ исключенія: въ этомъ легко убѣдиться, взявъ среднее изъ многихъ измѣреній.

Въ архитектурѣ мы имѣемъ дѣло уже съ болѣе или менѣе сознательнымъ примѣненіемъ того же принципа. Для примѣра разсмотримъ одно изъ знаменитѣйшихъ произведеній древне-греческой архитектуры — Парѳенонъ (фиг. 108). Длина его архитрава

107 футовъ, высота же всего зданія отъ основанія до верхушки—65 фут. Эти двѣ цифры, ширины и вышины, вполнѣ удовлетворяютъ пропорціи золотого дѣленія: если взять 0,618 отъ 107, получимъ 65,27—т. е., пренебрегая дробью, высоту зданія. Если высоту Парѳенона разбить на части по пропорціи золотого дѣленія, то окажется, что всѣ получающіяся при этомъ точки обозначены характерными выступами фасада.

Произведеніе готической архитектуры также часто удовлетворяетъ тому же математическому принципу.

Послѣ этого отступленія въ область эстетики, вернемся снова къ нашей основной темѣ—математика въ природѣ.

Законъ листорасположенія.

Листья на стеблѣ могутъ располагаться двояко: либо къ извѣстному пункту стебля прикрѣпляется всего одинъ листъ, либо сразу нѣсколько. Въ томъ и другомъ случаѣ расположеніе ихъ не случайно и подчиняется опредѣленнымъ математическимъ законамъ. Мы разсмотримъ здѣсь только первый случай, болѣе общій и интересный.

Если вы внимательно разсмотрите вѣточку съ одиноко сидящими листьями, то замѣтите, что основанія черешковъ располагаются по *винтовой* линіи: каждый слѣдующій листъ прикрѣпляется повыше и въ сторону отъ предыдущаго. Это выступитъ отчетливѣе, если соединить послѣдовательно основанія листьевъ ниткой—она будетъ обвиваться вокругъ стебля въ формѣ правильной винтовой или спиральной линіи.

Слѣдя за расположеніемъ листьевъ на этой спирали [1]), мы непремѣнно наткнемся на такіе листья, которые сидять одинъ надъ другимъ,—по образующей цилиндрической поверхности стебля. Часть спирали, заключающаяся между двумя такими листьями, называется въ ботаникѣ *цикломъ;* въ предѣлахъ одного цикла спираль можетъ нѣсколько разъ огибать стебель, въ зависимости отъ ея крутизны.

---

[1]) Строго говоря, терминъ «винтовая линія» здѣсь умѣстнѣе, нежели «спираль», но въ ботаникѣ установилось употребленіе второго термина, котораго мы и держимся.

Въ ботаникѣ листорасположеніе характеризуютъ числомъ оборотовъ спирали и числомъ листьевъ—въ предѣлахъ одного цикла. Для краткости и удобства обозначаютъ листорасположеніе въ видѣ дроби: въ числителѣ пишутъ число оборотовъ одного цикла спирали, а въ знаменателѣ число листьевъ въ этомъ циклѣ. Такъ, дробь $\frac{3}{8}$ показываетъ, что одинъ циклъ спирали *трижды* обходитъ кругомъ стебля, и что въ этомъ циклѣ 8 листьевъ. Легко понять, что та же самая дробь выражаетъ и уголъ расхожденія двухъ сосѣднихъ листьевъ—въ данномъ случаѣ $\frac{3}{8}$ окружности, т. е. 135°. Отсюда слѣдуетъ также, что дроби $\frac{3}{8}$ и $\frac{5}{8}$ выражаютъ, въ сущности, одно и то же листорасположеніе, ибо уголъ въ $\frac{3}{8}$ окружности дополняетъ до 360° уголъ въ $\frac{5}{8}$ окружности. Различныя цифры получаются въ зависимости отъ того, что въ одномъ случаѣ спираль вели, напр., справа налѣво, въ другомъ—слѣва направо.

Каждый видъ растеній имѣетъ свое листорасположеніе, или, вѣрнѣе,—свой уголъ расхожденія листьевъ, который выдерживается съ большой или меньшей строгостью во всѣхъ его частяхъ и распространяется не только на листья, но и на расположеніе вѣтокъ, почекъ, цвѣтовъ, чешуекъ внутри почекъ. Но этотъ уголъ, варьируя отъ растенія къ растенію, однако непроизволенъ: во всемъ растительномъ мірѣ наблюдается сравнительно небольшое число типовъ листорасположенія, выражающихся немногими дробями. Вотъ табличка наиболѣе распространенныхъ листорасположеній:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{8}, \frac{5}{13}, \frac{8}{21} \ldots$$

Ботаники давно замѣтили, что рядъ этотъ отличается одной любопытной и довольно неожиданной особенностью, а именно, что каждая изъ этихъ дробей (начиная съ третьей) получается изъ двухъ предыдущихъ черезъ сложеніе ихъ числителей и знаменателей.

Такъ

$$\frac{2}{5}=\frac{1+1}{2+3},\quad \frac{8}{21}=\frac{3+5}{8+13} \text{ и т. д.}$$

Поэтому достаточно запомнить только двѣ первыя дроби, чтобы удержать въ памяти всю табличку.

Однако, въ чемъ разгадка этого страннаго свойства дробей листорасположенія? Этимъ мы сейчасъ и займемся. Прежде всего замѣнимъ въ табличкѣ дроби $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{8}$ и т. д. равнозначущими имъ дробями $\frac{3}{5}$, $\frac{5}{8}$ и т. д.—мы вѣдь знаемъ уже, что такая замѣна вполнѣ допустима, ибо эти дроби выражаютъ одно и то же листорасположеніе. Получимъ рядъ

$$\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{5},\ \frac{5}{8},\ \frac{8}{13},\ \frac{13}{21}\ \ldots\ldots,$$

гдѣ числители и знаменатели послѣдовательныхъ дробей даютъ уже извѣстный намъ рядъ Фибоначчи (см. стр. 165). Разгадка раскрывается довольно просто и находится въ тѣснѣйшей связи опять таки съ принципомъ золотого дѣленія.

Въ самомъ дѣлѣ, не трудно убѣдиться, что дроби только что приведеннаго ряда суть простѣйшія приближенія величины $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, найденныя путемъ разложенія ея въ безконечную непрерывную дробь:

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots\ldots}}}}}$$

Заинтересовавшее насъ выше правило составленія ряда (черезъ сложеніе числителей и знаменателей) есть просто слѣдствіе закона составленія подходящихъ дробей при знаменателѣ, равномъ единицѣ:

		1	1	1	1	1
1	1	2	3	5	8	13
1	2	3	5	8	13	21

Итакъ, къ чему же мы пришли? Къ правилу, что *листья на стеблѣ стремятся расположиться такимъ образомъ, чтобы раздѣлить окружность стебля въ крайнемъ и среднемъ отношеніи,—избирая притомъ простѣйшія приближенія этой пропорціи.*

Простѣйшія,—ибо въ теоріи непрерывныхъ дробей доказывается, что подходящія дроби, при данной степени приближенія, отличаются наименьшими числителемъ и знаменателемъ: не существуетъ никакой иной дроби, которая, имѣя меньшіе члены, нежели взятая подходящая, выражали бы искомую величину точнѣе.

Замѣчательная связь, существующая между листорасположеніемъ и пропорціей золотого дѣленія, была открыта болѣе 60-ти лѣтъ тому назадъ уже упомянутымъ выше Цейзингомъ и опубликована въ его трудѣ «Эстетическія изысканія» (Aesthetische Forchungen. Francfurt a. M. 1855). Но это открытіе почему-то забыто и притомъ такъ основательно, что когда пишущій эти строки, въ свои студенческіе годы, самостоятельно подмѣтилъ эту законосообразность и обратился за разъясненіемъ къ профессору — выдающемуся авторитету въ ботанической наукѣ, то спеціалистъ откровенно сознался, что ему ничего неизвѣстно о связи листорасположенія съ золотымъ дѣленіемъ...

Труды Цейзинга (откуда заимствованы нѣкоторые изъ прилагаемыхъ рисунковъ) стали теперь рѣдкостью. На русскомъ языкѣ въ 1875 г. была издана анонимная брошюра «Золотое дѣленіе, какъ основной морфологическій законъ въ природѣ и искусствѣ» (Москва). Но и ее можно достать только у букинистовъ. Знаменитый художникъ и ученый Леонардо-да-Винчи хорошо понималъ и цѣнилъ эстетическое значеніе золотого сѣченія; подъ его вліяніемъ и при его сотрудничествѣ было написано въ 1609 году сочиненіе Луки Пачіоло «Божественное дѣленіе» (Divina proportio), гдѣ эта тема трактуется съ большой обстоятельностью.

Математическій инстинктъ пчелъ.

Задолго, быть можетъ, до появленія человѣка на земномъ шарѣ, пчелы разрѣшили задачу, представляющую не малыя геометрическія трудности. Хотя она разрѣшается средствами элемемтарной математики, но не думаемъ, чтобы ученики выпускного класса были довольны, если бъ имъ на экземенѣ предложили эту «пчелиную задачу».

Архитектура сотъ съ ихъ шестигранными ячейками извѣстна всякому. Однако далеко не всѣ знаютъ, съ какимъ поистинѣ поразительнымъ расчетомъ онѣ сооружаются. Стремясь возможно экономнѣе использовать мѣсто въ тѣсномъ ульѣ и возможно меньше затратить драгоцѣннаго воска, пчелы показали себя не только трудолюбивыми архитекторами, но и отмѣнными математиками.

Остановимся прежде всего на шестиугольной формѣ ячеекъ и разберемъ, почему пчелы отдали предпочтеніе этому многоугольнику. Передъ ними стояла задача--заполнить данную плоскость правильными многоугольниками *сплошь безъ просвѣтовъ*,—ибо улей тѣсенъ и надо использовать каждое мѣстечко. Какіе многоугольники годятся для этой цѣли? Вотъ первый вопросъ, и мы займемся его разсмотрѣніемъ.

Сумма угловъ всякаго многоугольника $= 2d\,(n-2)$, слѣд. каждый уголъ правильнаго многоугольника о n сторонахъ $=$ $= \dfrac{2d\,(n-2)}{n}$. Если такіе многоугольники *сплошь* заполняютъ какую-либо плоскость, то вокругъ каждой вершины ихъ должно быть расположено цѣлое число такихъ угловъ. Другими словами, правильный многоугольникъ только тогда годится для сплошного заполненія плоскости, когда уголъ его, повторенный k разъ, составитъ $4d$. Поэтому мы можемъ составить слѣд. уравненіе:

$$k \cdot \frac{2d(n-2)}{n} = 4d.$$

Сокративъ на d и сдѣлавъ упрощенія, получимъ:

$$nk - 2k - 2n = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

гдѣ n — число угловъ (или сторонъ) многоугольника, а k—число многоугольниковъ, имѣющихъ общую вершину. Слѣд., n и k должны быть числа цѣлыя и положительныя. Намъ остается найти всѣ цѣлыя и положительныя рѣшенія этого неопредѣленнаго уравненія 2-й степени.

Для этого придется сдѣлать рядъ преобразованій. Опредѣливъ n изъ уравненія (1), имѣемъ:

$$n = \frac{2k}{k-2} = \frac{2k-4+4}{k-2} = 2 + \frac{4}{k-2}.$$

Разсматривая равенство

$$n = 2 + \frac{4}{k-2},$$

мы видимъ, что n будетъ цѣлымъ числомъ лишь тогда, когда частное $\frac{4}{k-2}$ будетъ число цѣлое; другими словами — когда k—2 будетъ однимъ изъ дѣлителей числа 4. Такихъ дѣлителей немного, и ихъ легко найти всѣ: 4, 2 и 1. Дальнѣйшій ходъ рѣшенія ясенъ.

$k-2=$	4	2	1
$\frac{4}{k-2}=$	1	2	4
$n=2+\frac{4}{k-2}=$	3	4	6
$k=$	6	4	3

Итакъ, только три рѣшенія удовлетворяютъ нашимъ условіямъ и, слѣдовательно, только три правильныхъ многоугольника могутъ заполнить плоскость сплошь, безъ просвѣтовъ. Это— **треугольникъ, квадратъ** и **шестиугольникъ.** Въ первомъ случаѣ къ каждой вершинѣ будутъ сходиться 6 многоугольниковъ, во второмъ—4, въ третьемъ—3.

Какому же изъ нихъ надо отдать предпочтеніе? При устройствѣ торцовыхъ мостовыхъ шашкамъ придаютъ шестиугольную форму,—но дѣлается это просто потому, что тупые углы (120°)

менѣе скалываются, нежели прямые углы квадрата или острые— треугольника (замѣтимъ, къ тому же, что дерево колется вдоль годичныхъ слоевъ, имѣющихъ форму концентрическихъ круговъ). Пчеламъ съ этимъ особенно считаться не приходится, зато имъ крайне важно экономить воскъ для стѣнокъ ячеекъ. Значитъ, надо опредѣлить, какой изъ этихъ многоугольниковъ, при равныхъ площадяхъ, имѣетъ наименьшій контуръ. Это второй математическій вопросъ, также правильно разрѣшенный пчелами, ибо изъ трехъ упомянутыхъ фигуръ шестиугольникъ какъ разъ имѣетъ наименьшій контуръ.

Въ самомъ дѣлѣ. Вообразимъ правильные треугольникъ, квадратъ и шестиугольникъ, имѣющіе одну и ту же площадь S, и сравнимъ ихъ периметры.

Для $\triangle$-ка изъ равенства

$$S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$$

находимъ сначала сторону a, а затѣмъ и периметръ $P_1 = 3a$

$$P_1 = 6\sqrt{\frac{S}{\sqrt{3}}}.$$

Для квадрата имѣемъ, что сторона его $b = \sqrt{S}$, а слѣдов. периметръ

$$P_2 = 4\sqrt{S}.$$

Для правильнаго шестиугольника со стороной c имѣемъ:

$$S = \frac{3c^2\sqrt{3}}{2},$$

откуда периметръ

$$P_3 = 6c = 6\sqrt{\frac{2S}{3\sqrt{3}}}.$$

Отношеніе:

$$P_1 : P_2 : P_3 = 6\sqrt{\frac{S}{\sqrt{3}}} : 4\sqrt{S} : \sqrt{\frac{2S}{3\sqrt{3}}} = 1 : \frac{2}{3}\sqrt[4]{3} : \frac{1}{3}\sqrt{6} =$$

$$= 1 : 0{,}905 : 0{,}816,$$

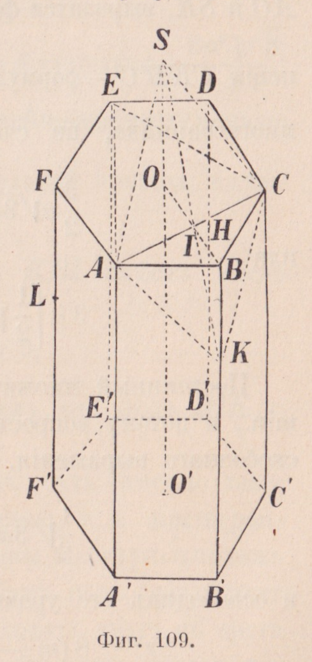
откуда ясно, что периметръ шестиугольника (P_3) наименьшій.

Но и это еще не всѣ математическіе вопросы, разрѣшенные пчелами. Самую трудную задачу намъ еще предстоитъ разсмотрѣть. Она-то собственно и есть та «задача о пчелиныхъ ячейкахъ», которою занимались ученые XVIII вѣка. Полное рѣшеніе ея принадлежитъ извѣстному математику Маклореню, который занялся ею по совѣту натуралиста Реомюра. Ниже мы помѣщаемъ задачу и ея рѣшеніе въ томъ видѣ, какъ они приведены въ курсѣ алгебры Н. Н. Маракуева.

Задача 69-я.

О пчелиныхъ ячейкахъ.

На продолженіи оси OO' правильной шестиугольной призмы возьмемъ точку S. Черезъ эту точку и черезъ каждую изъ сторонъ равносторонняго треугольника ACE, полученнаго соединеніемъ чрезъ одну изъ вершинъ верхняго основанія призмы, проведемъ три плоскости, по которымъ отрѣжемъ отъ призмы три тетраэдра $BACK$, $DCEH$ и $FEAL$ и замѣнимъ ихъ однимъ тетраэдромъ $SACE$, поставленнымъ надъ призмой. Новый многогранникъ будетъ ограниченъ сверху тремя ромбами $SAKC$, $SCEH$, $SEAL$; объемъ его всегда равенъ объему взятой призмы, гдѣ бы ни взять точку S на оси, ибо пирамида $SACE$ составлена изъ трехъ пирамидъ $SOAC$, $SOCE$ и $SOEA$, соотвѣтственно равныхъ тремъ отрѣзаннымъ пирамидамъ.



Фиг. 109.

Такъ, пирамида $SOAC$ = пир. $KABC$, ибо онѣ имѣютъ равныя основанія ($\triangle OAC = \triangle ABC$, какъ половины

ромба $ABCO$) и равныя высоты SO и KB (по равенству прямоугольныхъ треугольниковъ SOI и KBI).

Имѣя равные объемы, многогранники имѣютъ, однако, различныя поверхности, и *задача состоитъ въ опредѣленіи точки S такъ, чтобы поверхность новаго десятигранника имѣла наименьшую величину.*

Рѣшеніе задачи.

Пусть $AB=a$, $BB'=OO'=b$, $BK=SO=x$; въ такомъ случаѣ: $AC=a\sqrt{3}$; $SI=\sqrt{SO^2+OI^2}=\sqrt{x^2+\frac{a^2}{4}}=$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{4x^2+a^2};\text{слѣд. } SK=\sqrt{4x^2+a^2};$$

площадь ромба $SAKC$, равная полупроизведенію діагоналей AC и SK, выразится формулою $\frac{1}{2}a\sqrt{3a^2+12x^2}$; площадь трапеціи $CKB'C'$ — формулою $\frac{1}{2}a(2b-x)$. Слѣдоват., поверхность многогранника, не считая основанія, выражается формулою

$$\frac{3}{2}a\sqrt{3a^2+12x^2}+3a(2b-x),$$

или

$$3\,a\left[\frac{1}{2}\sqrt{3a^2+12x^2}+2b-x\right].$$

Постоянный множитель $3a$ не вліяетъ на условія max. и min., и потому вопросъ приводится къ опредѣленію minimum'а скобочнаго выраженія. Положивъ

$$\frac{1}{2}\sqrt{3a^2+12x^2}+2b-x=m$$

и освободивъ это уравненіе отъ радикала, найдемъ

$$8x^2-8(m-2b)x+3a^2-4(m-2b)^2=0,$$

откуда

$$x=\frac{2(m-2b)\pm\sqrt{6\,[2(m-2b)^2-a^2]}}{4}$$

Чтобы x было дѣйствительно, необходимо, чтобы

$$2(m-2b)^2-a^2 \geqslant 0, \text{ или } (m-2b)^2 \geqslant \frac{a^2}{2} \text{ или } m-2b \geqslant \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

Осюда minim. $(m)=2b+\frac{a}{\sqrt{2}}$. Помножимъ на $3a$, найдемъ что искомая минимальная поверхность равна

$$6ab+\frac{3a^2}{\sqrt{2}},$$

а соотвѣтстующая величина $x=\frac{1}{4}a\sqrt{2}$.

Формула x показываетъ, что разность двухъ смежныхъ боковыхъ реберъ должна быть равна четверти діагонали квадрата, построеннаго на сторонѣ шестиугольника, служащаго основаніемъ призмы.

Поверхность призмы, не считая основанія, былабы $6ab+\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$; слѣд. поверхность многогранника минимальной поверхности меньше на $\frac{3}{2}a^2(\sqrt{3}-\sqrt{2})$ поверхности шестиугольной призмы, имѣющей то же основаніе и тотъ же объемъ.

Легко видѣть, что для треугольника KBI имѣетъ мѣсто пропорція

$$BK:BI:IK=1:\sqrt{2}:\sqrt{3},$$

откуда (при помощи тригонометріи) найдемъ, что уголъ $BIK=$ $=35°15'52''$.

Остается прибавить, что ячейки пчелъ суть именно такіе десятигранники съ наименьшей поверхностью, т. е. шестигранныя призмы, ограниченныя съ одной стороны шестиугольникомъ (входъ въ ячейку), съ другой тремя ромбами подъ указаннымъ угломъ (дно). Два слоя ячеекъ вплотную входятъ другъ въ друга острыми выступами своихъ доньевъ и обращены открытыми шестиугольниками въ противоположныя стороны. Каждая пара такихъ слоевъ и составляетъ сотъ.

Столь совершенная архитектура пчелиныхъ сотъ, съ математическимъ расчетомъ и экономіей использующая помѣщеніе улья и строительный матеріалъ (воскъ), уже давно приводитъ въ изумленіе наблюдателей. Еще Паппусъ, математикъ IV вѣка по Р. Хр., обратилъ вниманіе на строго геометрическую форму ячеекъ. Дарвинъ пытался объяснить возникновеніе этого сложнаго инстинкта пчелъ своей теоріи естественнаго отбора, а именно, онъ допускаетъ, что предки нашихъ пчелъ сооружали ячейки цилиндрической формы, и что эти цилиндры, тѣсня другъ друга, постепенно превратились въ шестигранники. Однако его теорія далеко не объясняетъ всѣхъ особенностей структуры сотъ (напр. того, что ячейки при данномъ объемѣ имѣютъ наименьшую поверхность). Нѣтъ сомнѣнія, что мы стоимъ здѣсь предъ одной изъ глубочайшихъ загадокъ природы.

Жукъ геометръ.

Если пчелы разрѣшили задачу изъ курса элементарной математики, то небольшой жучокъ семейства слониковъ разрѣшилъ еще болѣе трудную задачу—изъ курса высшей математики.

Фиг. 110. Жукъ-геометръ въ увеличенномъ видѣ. Черточка внизу даетъ понятіе о его натуральной величинѣ.

Зоологическое названіе этого жука-математика *Rhynchites betulae*, а народное — *березовый слоникъ*. Этотъ маленькій (4 миллиметра), черный, блестящій жучокъ съ длиннымъ хоботкомъ имѣетъ привычку свертывать въ трубки листья березы, ольхи, бука, чтобы положить въ нихъ свои яички. Большого удовольствія садоводамъ и лѣсоводамъ березовый слоникъ, конечно, не доставляетъ, но зато онъ способенъ привести въ восхищеніе математика, если послѣдній обратитъ вниманіе на способъ, какимъ жучокъ свертываетъ листья. Въ общихъ чертахъ эта манера такова. Предварительно слоникъ прогрызаетъ близъ основанія листа двѣ кривыя линіи, которыя идутъ отъ средней жилки къ краямъ (см. фиг. 111, цифра 3). Послѣ этого онъ свертываетъ въ трубку сначала одну половину листа, а затѣмъ обертываетъ эту трубку другой половиной. Получается нѣчто въ родѣ сигары,

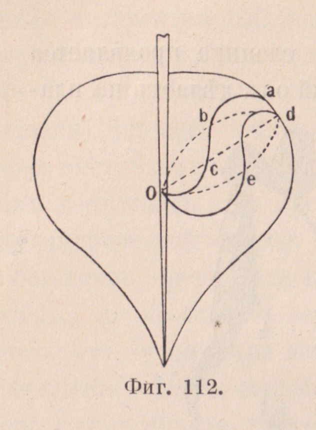
которая и остается висѣть на черешкѣ (фиг. 111, цифры 4 и 5), укрывая положенныя внутри ея яйца. Все это длится около получаса.

Математическій инстинктъ березоваго слоника проявляется въ выборѣ формы кривого прорѣза, который онъ дѣлаетъ на пла-

Фиг. 111. *Жукъ-геометръ.* 1 и 2—Березовый слоникъ. 3—листъ, на которомъ показаны форма и положеніе прорѣзовъ. 4 и 5—свернутые листья. 6—личинка. 7—слоникъ въ увеличенномъ видѣ.

стинкѣ листа. Эта кривая выбирается далеко не случайно и находится въ нѣкоторой, довольно сложной, — однако вполнѣ опредѣленной — связи съ формой самаго края листа. Вы можете убѣдиться въ этомъ на опытѣ. Вырѣжьте изъ бумаги фигуру листа (фиг. 112) и попробуйте свертывать ея половины въ

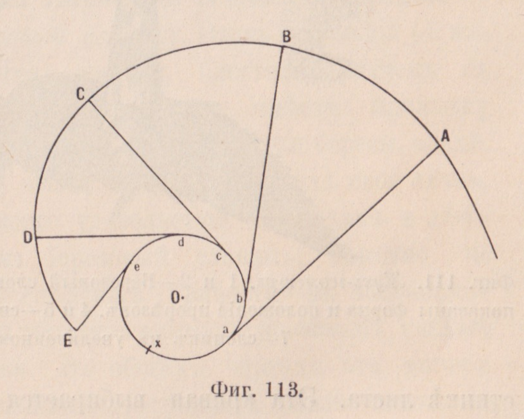
трубку, какъ это дѣлаетъ слоникъ, прорѣзавъ предварительно листъ у его основанія. Окажется, что если прорѣзъ сдѣланъ по прямой *od* или по дугамъ *obd* и *oed*, свертываніе удается далеко не такъ легко и удобно, какъ въ томъ случаѣ, когда надрѣзу придана форма *S*-образной линіи *oca* или *oed*. Для полнаго же успѣха дѣла важно, чтобы эта *S*-образная кривая имѣла вполнѣ опредѣленную форму и занимала опредѣленное положеніе по отношенію къ краю листа. Въ терминахъ такъ называемой высшей митематики эта взаимная связь можетъ быть выражена такъ: линія прорѣза должна быть «*эволютой*» краевой линіи листа; или, что то же самое, краевая линія листа должна быть «*эвольвентой*» линіи прорѣза.



Фиг. 112.

Эволюта и эвольвента.

Постараемся объяснить кратко и наглядно, что такое «эволюта» и «эвольвента». Обратите вниманіе на фигуру 113. Здѣсь изображены двѣ кривыя—окружность *O* и кривая *ABCDE*. Зависимость между ними та, что каждая касательная къ кривой *O* перпендикулярна къ кривой *ABCDE*. Если двѣ кривыя находятся между собой въ такой зависимости, то ту, которая перпендикулярна къ касательнымъ первой кривой, называютъ *эвольвентой* или развертывающей, а первую—*эволютой* или разверткой. Въ нашемъ примѣрѣ кругъ *O* будетъ эволютой, а кривая *ABCDE*—эвольвентой.



Фиг. 113.

Если вы желаете по данной эволютѣ построить ея эвольвенту, то можете поступить слѣдующимъ образомъ. Начертите

эту эволюту на толстомъ картонѣ или деревѣ и вырѣжьте ее по краю. Положите вашу картонную эволюту на листъ бумаги, закрѣпите нить Aa въ точкѣ a (см. фиг. 113); на другомъ же концѣ нити сдѣлайте петельку и вставьте въ нее карандашъ. Теперь *наматывайте* нить на эволюту, слѣдя за тѣмъ, чтобы нить все время оставалась натянутой. Тогда конецъ A начертитъ вамъ эвольвенту взятой кривой. Это строго доказывается въ курсахъ аналитической геометріи.

Вы могли поступить и иначе — а именно, предварительно обмотать нить кругомъ эволюты и, держа въ натянутомъ видѣ, *разматывать* ее. Въ этомъ случаѣ вы получите ту же самую эвольвенту, что и ранѣе.

Отсюда слѣдуетъ, между прочимъ, что касательныя эволюты (онѣ же и радіусы кривизны эвольвенты) равны длинѣ той части эволюты, съ которой онѣ смотались. Другими словами: если мы начали сматывать съ точки x (фиг. 113), то длина прямой eE равна длинѣ дуги ex, $dD = dex$, $cC = cdex$ и т. д.

Фиг. 114.

Обратно, если по данной эвольвентѣ надобно начертить ея эволюту, то проводятъ къ эвольвентѣ рядъ нормалей (перпендикулярныхъ линій), которыя, пересѣкаясь одна съ другой, образуютъ нѣкоторую ломаную линію. Вписавъ въ эту ломаную линію кривую, касательную къ ея элементамъ, вы получите искомую эволюту.

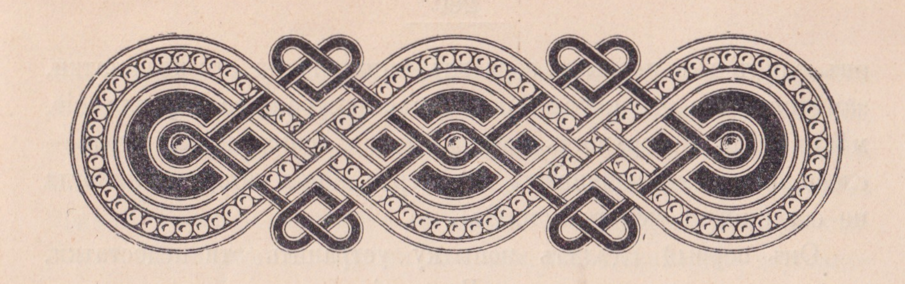
Задача 70-я.

Построеніе жука-геометра.

Вотъ такого-то рода задачу—постройки эволюты по данной эвольвентѣ—и рѣшаетъ березовый слоникъ. На той половинѣ листа, которая потомъ послужитъ внутренней трубкой, онъ выгрызаетъ эволюту краевой линіи листа. Если для линіи надрѣза *Abcdegiklm* (см. фиг. 114) построить ея эвольвенту, то эта послѣдняя будетъ имѣть форму кривой *ABCDEGIKLxy*, весьма близко подходящую къ краевой линіи листа.

Прорѣзъ другой половины листа, которая облекаетъ первую, не отличается такой математической правильностью. Этого и нельзя ожидать, такъ какъ вторая половина не свертывается свободно, какъ первая, а навивается на первую.

На жукѣ-геометрѣ мы и закончимъ нашу бесѣду о «математикѣ въ природѣ».



«Новыя начала геометріи».

Знаменитый мемуаръ Лобачевскаго въ краткомъ изложеніи Н. П. Соколова.

Тому, кто желаетъ ознакомиться съ работами Лобачевскаго лучше всего начинать съ изученія его сочиненія «Новыя начала геометріи». Вотъ почему, желая ознакомить читателя съ характеромъ изслѣдованій нашего великаго геометра, мы и даемъ ниже разборъ содержанія этого сочиненія. Если читатель, въ силу малой подготовки, не осилитъ сразу всей это главы, то достаточно внимательно прочесть на первый разъ первую ея половину,—особенно начала новой теоріи параллельныхъ—до введенія въ изложеніе тригонометрическихъ и гиперболическихъ функцій. Это не составитъ особаго труда.

Разсматриваемое сочиненіе Лобачевскаго состоитъ изъ введенія и тринадцати главъ.

Во введеніи, которое Лобачевскій начинаетъ «разборомъ прежнихъ теорій», онъ указываетъ недостатки главнѣйшихъ изъ извѣстныхъ ему доказательствъ одиннадцатой аксіомы Евклида и старается выяснить ихъ причины. Вопреки мнѣнію Лежандра, онъ находитъ, что эти причины коренятся вовсе не въ недостаточно точномъ опредѣленіи прямой и даже «нисколько не зависятъ отъ тѣхъ недостатковъ, которые скрывались въ первыхъ понятіяхъ». Тѣмъ не менѣе эти недостатки весьма важны сами по себѣ, и, къ чести Лобачевскаго надо сказать,

онъ однимъ изъ первыхъ обратилъ вниманіе на эти недостатки, замѣтивъ, что эти первыя понятія: «пространство, протяженіе, мѣсто, тѣло, поверхность, линія, точка, направленіе, уголъ — слова, которыми начинаютъ Геометрію, но съ которыми никогда не соединяютъ яснаго понятія».

Онъ первый сдѣлалъ попытку устранить эти недостатки, перестроивъ сызнова начала Геометріи,—начала, къ которымъ со времени Евклида не смѣлъ прикасаться ни одинъ смертный. Только блестящій успѣхъ первыхъ изслѣдованій, правда, не признанныхъ и даже осмѣянныхъ современниками, могъ внушить такую смѣлую, скажемъ, даже дерзкую мысль.

Уже доказанная предыдущими изслѣдованіями необходимость опыта для доказательства одиннадцатой аксіомы Евклида приводитъ Лобачевскаго къ заключенію, нынѣ уже, можно сказать, ходячему, что «первыми данными будутъ всегда тѣ понятія, которыя мы пріобрѣтаемъ въ природѣ посредствомъ нашихъ чувствъ» и что темноту въ основныхъ понятіяхъ Геометріи производитъ именно «отвлеченность, которая въ примѣненіи къ дѣйствительнымъ измѣреніямъ дѣлается лишней, а слѣдовательно въ самую теорію введена напрасно». Многія опредѣленія онъ считаетъ недостаточными уже и потому, что эти опредѣленія «не только не указываютъ на происхожденіе геометрической величины, которую хотятъ опредѣлить, но даже не доказываютъ, что такія величины существовать могутъ». Посему онъ «вмѣсто того, чтобы начинать Геометрію прямой линіею и плоскостью, какъ это дѣлается обыкновенно, предпочелъ начать сферой и кругомъ, которыхъ опредѣленіе не подлежитъ упреку въ неполнотѣ, потому что въ этихъ опредѣленіяхъ заключается способъ, какимъ образомъ эти величины происходятъ».

Плоскость онъ послѣ этого опредѣляетъ, какъ геометрическое мѣсто круговъ пересѣченія равныхъ сферъ, описанныхъ около двухъ неподвижныхъ точекъ—полюсовъ. Изъ этого опредѣленія онъ выводитъ уже всѣ основныя свойства плоскости. Соотвѣтственно этому, прямая опредѣляется, какъ геометрическое мѣсто точекъ пересѣченія равныхъ круговъ, описанныхъ около двухъ данныхъ точекъ на плоскости, хотя это опредѣ-

леніе выражено у Лобачевскаго недостаточно ясно и начинается собственно такимъ опредѣленіемъ: «Прямой называется та линія, которая между двухъ точекъ покрываетъ сама себя во всѣхъ положеніяхъ», а затѣмъ уже выводятся всѣ остальныя свойства прямой и устанавливаются ея отношенія къ кругу и плоскости. Этимъ опредѣленіямъ основныхъ элементовъ геометріи и установленію ихъ основныхъ соотношеній посвящены обѣ первыя главы сочиненія.

Третья глава посвящена изученію мѣровыхъ соотношеній отрѣзковъ и угловъ. Здѣсь, кажется, въ первый разъ дается понятіе объ углѣ, какъ числѣ отвлеченномъ, показывающемъ только отношеніе двухъ дугъ одного круга, изъ которыхъ одна принята за единицу мѣры; опредѣленіе, которое надо, мнѣ кажется, считать единственно правильнымъ, но которое, къ сожалѣнію, во всѣхъ нашихъ учебникахъ замѣняется болѣе или менѣе неудачными альтернативами опредѣленій Евклида или Бертрана изъ Женевы. Вотъ подлинное опредѣленіе Лобачевскаго.

«*Величина дуги или части сферы, выраженная въ градусахъ и доляхъ градуса, даже вообще по сравненію съ тѣмъ же кругомъ или съ тою же сферой, называется уголъ, который бываетъ прямой, когда равенъ* $\frac{1}{2}\pi$, *острый, когда* $< \frac{1}{2}\pi$, *тупой, когда* $> \frac{1}{2}\pi$ *и* $< \pi$».

Это опредѣленіе дополняется еще двумя теоремами: 40. Линейный уголъ не зависитъ отъ величины полупоперечника въ кругѣ, но служитъ только къ опредѣленію взаимнаго положенія двухъ прямыхъ; и 42. Плоскостной уголъ не зависитъ отъ полупоперечника сферы, ни отъ мѣста для центра на линіи пересѣченія двухъ плоскостей.

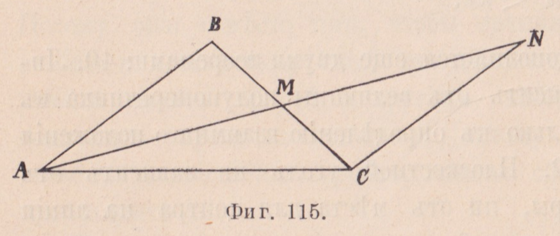
Опредѣливъ такимъ образомъ уголъ и указавъ вмѣстѣ съ тѣмъ способъ его измѣренія, Лобачевскій переходитъ въ слѣдующей четвертой главѣ—къ изученію взаимнаго положенія прямыхъ на плоскости, плоскостей и прямыхъ въ пространствѣ, при чемъ находитъ основныя зависимости между сторонами и углами треугольниковъ какъ плоскихъ, такъ и сферическихъ.

Пятая глава, посвященная измѣренію тѣлесныхъ угловъ, представляетъ весьма изящное изложеніе основныхъ теоремъ сферической Геометріи съ приложеніемъ ея къ теоріи правильныхъ тѣлъ. Глава шестая разсматриваетъ условія равенства треугольниковъ и зависимость свойствъ треугольника отъ гипотезы о суммѣ его угловъ. Наконецъ въ главахъ VII, VIII, X и отчасти XI Лобачевскій излагаетъ свою новую теорію параллельныхъ линій, не зависящую отъ справедливости одиннадцатой аксіомы Евклида. Главы IX, XII и XIII посвящены изложенію тригонометріи какъ плоской, такъ и сферической, и для насъ особаго значенія уже не имѣютъ; поэтому, не останавливаясь на нихъ, ограничимся только изложеніемъ новой теоріи параллельныхъ. При этомъ, простоты ради, позволимъ себѣ отступать иногда отъ подлиннаго изложенія, пользуясь трудами другихъ геометровъ, какъ предшествовавшихъ, такъ и слѣдовавшихъ за Лобачевскимъ.

Начнемъ съ доказательства трехъ послѣднихъ теоремъ главы шестой.

Сумма угловъ прямолинейнаго треугольника ABC не можетъ быть больше двухъ прямыхъ.

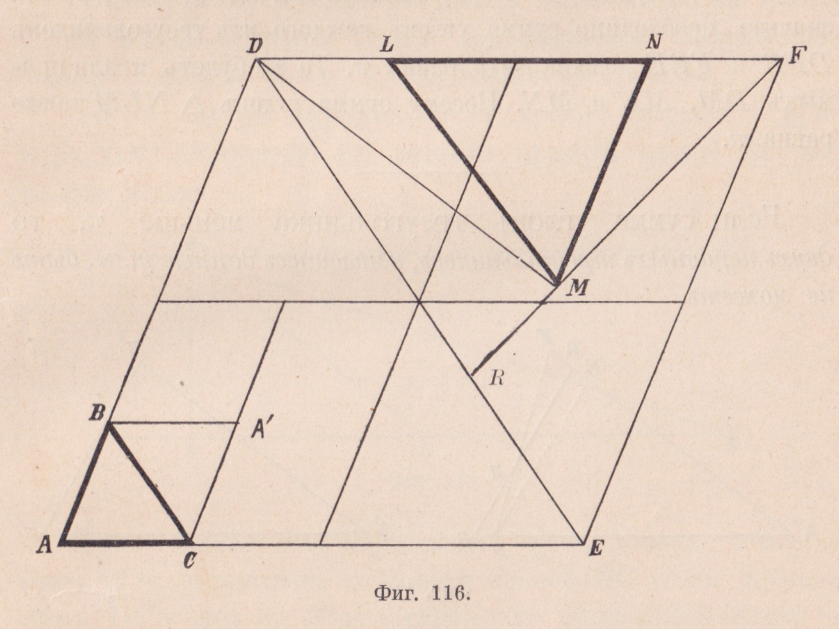
Пусть эта сумма $\pi + \alpha$, гдѣ α какъ угодно малый уголъ, и пусть A наименьшій уголъ $\triangle ABC$ (фиг. 115). Черезъ середину M стороны BC проведемъ прямую AM и на продолженіи ея отложимъ отрѣзокъ $MN = AM$. Тогда $\triangle AMB = NMC$, ибо имѣютъ равные вертикальные при вершинѣ M углы, заключенные между равными по построенію сторонами. Значитъ, сумма угловъ треугольника ANC должна быть равна суммѣ угловъ $\triangle$-ка ABC, т. е. равна $\pi + \alpha$, при чемъ хотя одинъ изъ угловъ его будетъ $< \frac{1}{2}A$. Продолжая подобное построеніе, мы придемъ наконецъ къ такому



Фиг. 115.

треугольнику, одинъ изъ угловъ котораго будетъ $< \frac{A}{2^n} < \alpha$, что невозможно, ибо сумма двухъ угловъ треугольника всегда $< \pi$.

Итакъ, сумма угловъ треугольника можетъ быть только или равна, или меньше π. Если она будетъ равна π хотя въ одномъ треугольникѣ, то она будетъ равна π и во всякомъ треугольникѣ.

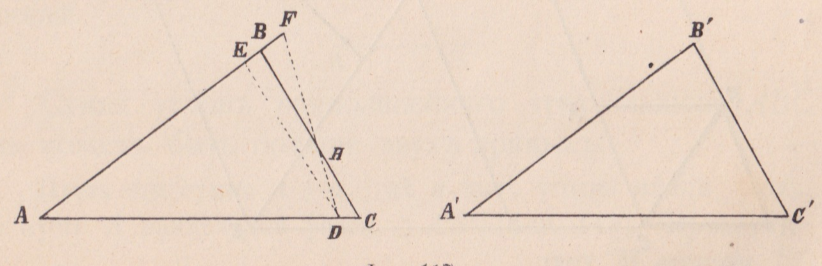


Фиг. 116.

Чтобы убѣдиться въ этомъ, построимъ на сторонѣ BC такого треугольника ABC равный ему $\triangle A'BC$ (фиг. 116). Сумма угловъ полученнаго параллелограмма будетъ 2π. Ясно, что изъ такихъ параллелограммовъ можно построить параллелограммъ, стороны котораго какъ угодно велики, а сумма угловъ 2π. Такой параллелограммъ въ свою очередь можетъ быть діагональю раздѣленъ на два равныхъ треугольника, сумма угловъ въ каждомъ изъ которыхъ будетъ π, а одинъ изъ угловъ равенъ углу A даннаго треугольника. Пусть FDE одинъ изъ такихъ треугольниковъ, достаточно большой для того, чтобы какой-либо произвольно взятый треугольникъ NLM могъ помѣститься

внутри его. Помѣстимъ его такъ, чтобы N и L лежали на FD, а M гдѣ-либо внутри FDE. Прямая FM, пересѣкая DE въ точкѣ R, раздѣлитъ FDE на два треугольника DFR и FRE. Согласно опредѣленію смежныхъ угловъ, сумма ихъ равна $2d$, т. е. $DRF + FRE = \pi$. Слѣдовательно, сумма угловъ этихъ двухъ треугольниковъ, очевидно, равная суммѣ угловъ $\triangle$-ка DEF, сложенной съ суммой двухъ названныхъ смежныхъ угловъ при точкѣ R, будетъ равна 2π. Но, согласно доказанному выше,—сумма угловъ треугольника не можетъ быть больше π, значитъ, необходимо сумма угловъ каждаго изъ треугольниковъ DFR и FRE должна быть равна π. То же будетъ и для прямыхъ DM, ML и MN. Посему сумма угловъ $\triangle$ NLM также равна π.

Если сумма угловъ треугольника меньше π, то *двухъ неравныхъ треугольниковъ, имѣющихъ данные углы, быть не можетъ.*



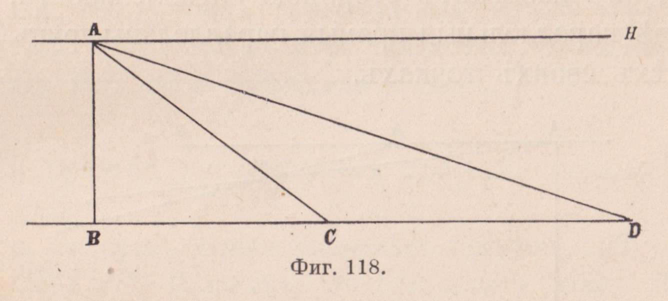
Фиг. 117.

Пусть ABC и $A'B'C'$—два треугольника (фиг. 117), такъ что $A = A'$, $B = B'$ и $C = C'$; $AC > A'C'$. Наложимъ $A'B'C'$ на ABC такъ, чтобы углы A и A' совмѣстились; пусть при этомъ точка C' упадетъ на точку D; точка B' можетъ упасть либо въ точку E на сторонѣ AB, либо въ точку F на ея продолженіи. Въ первомъ случаѣ сумма угловъ четыреугольника $BCDE$ будетъ равна 2π,—а именно: сумма смежныхъ угловъ $\angle AED + \angle BED = \pi$. Но уголъ $AED = \angle B$, поэтому $\angle B + \angle BED = \pi$. То же, очевидно, имѣетъ мѣсто и для остальной пары угловъ, такъ что $\angle C + \angle CDE = \pi$. Четыреугольникъ $BCDE$, сумма угловъ котораго равна 2π, любой изъ

діагоналей дѣлится на 2 треугольника, въ каждомъ изъ которыхъ сумма угловъ должна быть равна π, что, согласно вышедоказанному, *невозможно*. Во второмъ случаѣ прямыя BC и DF, пересѣкаясь, образуютъ два треугольника DCH и FBH, въ каждомъ изъ которымъ сумма двухъ угловъ π, а слѣдовательно сумма всѣхъ четырехъ угловъ больше π, что невозможно. Итакъ необходимо $A'B' = AB$, а потому и $A'B'C' = ABC$.

Разсмотрѣнныя предложенія даютъ возможность уже вполнѣ строго изложить новую теорію параллельныхъ Лобачевскаго, изложеніе коей начнемъ со слѣдующаго предложенія.

Чрезъ любую данную точку можно провести прямую, составляющую съ данной прямой какой угодно малый уголъ.



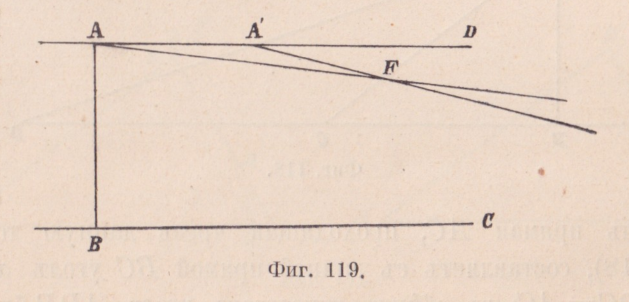
Фиг. 118.

Пусть прямая AC, проходящая чрезъ данную точку A (фиг. 118), составляетъ съ данной прямой BC уголъ α; отложимъ $DC = AC$; въ обѣихъ гипотезахъ уголъ ADB будетъ не больше $\frac{\alpha}{2}$. Повторяя то же построеніе, можемъ сдѣлать его меньшее $\frac{\alpha}{2^n}$, т. е. меньше всякой данной величины. Посему, если сумма угловъ треугольника равна π, то есть только одна прямая, проходящая чрезъ данную точку A параллельно BC (фиг. 118); ибо пусть AB перпендикуляръ къ BC, и AH перпендикуляръ къ AB, прямая AH не пересѣкаетъ BC. Проведемъ прямую AC, составляющую съ BC уголъ $C < \alpha$, уголъ HAC будетъ также, слѣдовательно, $< \alpha$, и потому какъ угодно малъ вмѣстѣ съ α, такъ что, какъ бы мало мы ни отклонили AH отъ ея

положенія, она уже будетъ пересѣкать BC. Не трудно видѣть, что и обратное предложеніе также имѣетъ мѣсто.

Если сумма угловъ треугольника $< \pi$, то прямыхъ, не пересѣкающихъ данной и проходящихъ чрезъ данную точку, можно провести безконечно много. Лобачевскій называетъ параллельными данной прямой BC двѣ такія прямыя AD и AE, которыя отдѣляютъ прямыя, пересѣкающія BC отъ непересѣкающихъ. Острый уголъ, который эти прямыя составляютъ съ перпендикуляромъ AB изъ A на BC, онъ называетъ угломъ параллельности относительно длины AB, и, если $AB = p$, обозначаетъ его символомъ $\Pi(p)$. Ту сторону, съ которой параллельныя прямыя приближаются другъ къ другу, онъ называетъ стороною параллельности.

Двѣ параллельныя прямыя параллельны другъ другу во всѣхъ своихъ точкахъ.

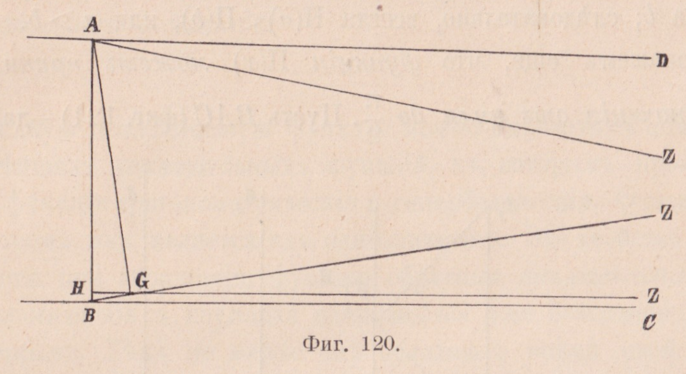


Фиг. 119.

Пусть AD параллельна BC (фиг. 119); на продолженіи AD въ сторону параллельности возьмемъ точку A' и проведемъ прямую $A'F$ внутри полосы между AD и BC; прямая AF непремѣнно пересѣкаетъ BC гдѣ-либо въ точкѣ H, прямая $A'F$, входящая въ треугольникъ ABH, можетъ выйти изъ него, только пересѣкая сторону BC', посему параллельной къ BC въ точкѣ A' можетъ быть только прямая AD. То же можно доказать и для любой точки прямой AD.

Прямая BC также параллельна прямой AD. Для сего достаточно показать, что всякая прямая BZ между BC и AD пересѣкаетъ AD. Опустимъ перпендикуляръ изъ A на BZ'

(фиг. 120), и повернемъ всю полученную фигуру, кромѣ прямой BC, около точки A такъ, чтобы этотъ перпендикуляръ AG совмѣстился съ AB,—прямая BZ займетъ тогда положеніе HZ



Фиг. 120.

между AD и BC, прямая AD положеніе AZ и будетъ пересѣкать HZ, ибо въ этомъ положеніи она должна пересѣкать прямую BC. Слѣдовательно, и въ начальномъ положеніи AD пересѣкала BC', что и требовалось доказать.

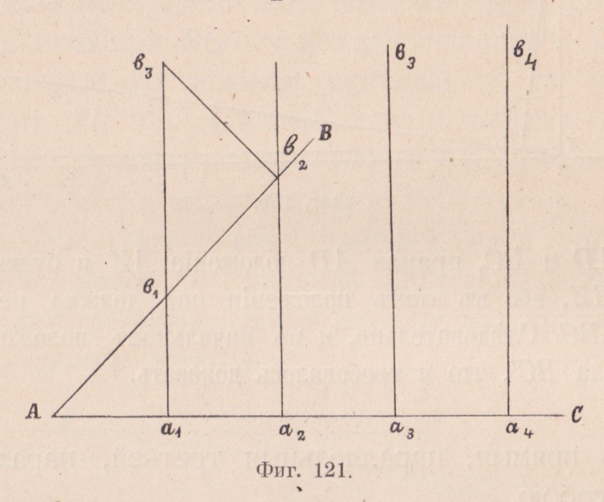
Двѣ прямыя, параллельныя третьей, параллельны между собою.

Пусть изъ трехъ непересѣкающихся прямыхъ AB параллельна CD и EF. Положимъ, что CD лежитъ между AB и EF, тогда любая прямая EF', направленная въ сторону CD, пересѣчетъ AB, а потому и CD, лежащую ближе ея. На доказательствѣ этой теоремы для случая, когда AB лежитъ между CD и EF, или когда AB, CD и EF не лежатъ въ одной плоскости, я останавливаться не буду, и перейду прямо къ выводу важнѣйшихъ слѣдствій самой теоремы.

Эта теорема даетъ намъ прежде всего возможность *судить о характерѣ функціи* $\Pi(x)$. Такъ, мы уже можемъ утверждать, что эта функція однозначна и всегда конечна; не трудно также показать, что она убываетъ съ возрастаніемъ перемѣннаго x. Дѣйствительно $\Pi(a) = \Pi(b)$ невозможно, ибо иначе два перпендикуляра къ одной прямой были бы параллельны, и $\Pi(x) = \frac{\pi}{2}$ всегда; въ то же время $\Pi(a) > \Pi(b)$ при $a > b$

также невозможно, ибо иначе прямая, проходящая чрезъ конецъ перпендикуляра a подъ угломъ $\Pi(b)$ къ нему, не пересѣкаетъ уже и прямой, параллельной къ данной въ концѣ перпендикуляра b; слѣдовательно, всегда $\Pi(a) < \Pi(b)$, или $a > b$.

Покажемъ еще, что *функція* $\Pi(x)$ *можетъ принимать всѣ значенія отъ нуля до* $\frac{\pi}{2}$. Пусть BAC (фиг. 121)—данный



Фиг. 121.

уголъ. Изъ точки b_1 на сторонѣ AB опускаемъ перпендикуляръ b_1a_1 на сторону AC и откладываемъ на AC отрѣзокъ $a_1a_2 = Aa_1$. Пусть перпендикуляръ изъ a_2 къ AC пересѣкаетъ сторону AB къ точкѣ b_2. Если сумма угловъ треугольника Aa_1b_1 будетъ $\pi - \alpha$, то въ треугольникѣ Ab_1a_2 она будетъ $\pi - 2\alpha$, а въ треугольникѣ $Aa_2b_2 < \pi - 2\alpha$. Повторяя подобное построеніе, мы будемъ получать все такіе треугольники съ общимъ угломъ A, сумма угловъ которыхъ будетъ меньше $\pi - 4\alpha$, $\pi - 6\alpha$ и вообще послѣ n построеній меньше $\pi - 2n\alpha$. Но такъ какъ она не можетъ быть меньше A, то такое построеніе можетъ быть повторено лишь конечное число разъ $n \leqq \frac{\pi - A}{2\alpha}$. Дальнѣйшіе перпендикуляры перестанутъ уже пересѣкать AB, начиная съ нѣкотораго конечнаго разстоянія x отъ точки A, для котораго $\Pi(x) = A$. Отсюда заключаемъ, что функція $\Pi(x)$ убываетъ непрерывно, начиная отъ значенія

$\Pi(0)=\frac{\pi}{2}$ до значенія $\Pi(\infty)=0$. Послѣднее обстоятельство позволяетъ намъ предполагать, что эта функція $\Pi(x)$ будетъ показательнаго характера.

Всякую показательную функцію можно выразить съ помощью простѣйшихъ показательныхъ функцій, къ которымъ принадлежатъ функціи тригонометрическія и гиперболическія. Основнымъ свойствомъ ихъ является ихъ однозначность. Это свойство утрачивается при обращеніи; функціи обратныя показательнымъ — логариѳмическія и круговыя оказываются уже безконечно многозначными. Тѣмъ не менѣе онѣ обладаютъ всѣми свойствами однозначныхъ функцій, если только мы будемъ принимать во вниманіе одну какую либо опредѣленную вѣтвь такой функціи, напр. если мы за значеніе z, соотвѣтствующее $u=e^z$ будемъ принимать $z=\lg\rho+\vartheta i$, гдѣ $\lg\rho$ — дѣйствительный логариѳмъ модуля u, а ϑ аргументъ u, не превосходящій π. Воспользовавшись этими соображеніями, попробуемъ разыскать аналитическое выраженіе функціи $\Pi(x)$.

Пусть BC—данная прямая (фиг. 118), A — точка внѣ ея, $AB=y$ — перпендикуляръ изъ A на BC. Пусть AD — какая либо прямая, проходящая чрезъ точку A, отрѣзокъ $BD=x$, уголъ $BAD=\theta$. Такъ какъ двѣ прямыя пересѣкаются только въ одной точкѣ, то каждому значенію θ будетъ тогда соотвѣтствовать одно и только одно значеніе x, а потому, согласно вышесказанному, каждому значенію $\mathrm{tg}\theta$ будетъ соотвѣтствовать одно и только одно значеніе $\mathrm{tg}hx$ и обратно. Посему $\mathrm{tg}\theta$ и $\mathrm{tg}hx$ должны быть связаны между собою линейнымъ соотношеніемъ, т. е. соотношеніемъ вида $\mathrm{tg}hx=\frac{A\mathrm{tg}\theta+B}{C\mathrm{tg}\theta+D}$. Но при $\theta=0$ и $x=0$, а потому $\mathrm{tg}\theta$ и $\mathrm{tg}hx$ обращаются въ нуль одновременно; сверхъ того обѣ функціи при переходѣ чрезъ нуль мѣняютъ знакъ; посему необходимо $B=0$, $C=0$, и искомая зависимость принимаетъ видъ $\mathrm{tg}hx=A\mathrm{tg}\theta$. Пусть теперь θ_0—уголъ параллельности для y, такъ что $\theta_0=\Pi(y)$, тогда $x_0=\infty$, $\mathrm{tg}h\infty|=A\mathrm{tg}\Pi(y)$, откуда $A=\mathrm{Ctg}\Pi(y)$.

Возьмемъ теперь какой либо треугольникъ ABC прямоугольный при точкѣ C, такъ что гипотенуза его будетъ c, катеты a и b. Изъ послѣдняго соотношенія находимъ $\mathrm{tg}ha = d(b)\mathrm{tg}A$, $\mathrm{tg}hb = d(a)\mathrm{tg}B$, откуда, замѣчая, что $\cos h^2 = x + \sin h^2 x$, находимъ:

$$\sin A = \frac{\sin ha}{\sqrt{\varphi^2(b) + \sin h^2 a + \varphi^2(b)\sin h^2 a}},$$

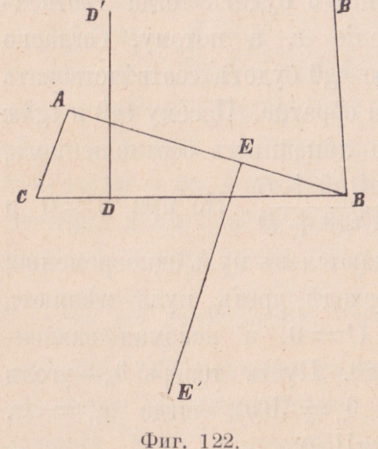
$$\sin B = \frac{\sin hb}{\sqrt{\varphi^2(a) + \sin h^2 b + \varphi^2(a)\sin h^2 b}},$$

Такъ какъ $\sin A$ долженъ обращаться въ единицу при $a = c$ и въ $\sin B$ при $a = b$, то полученныя выраженія необходимо должны быть вида $\frac{f(a)}{f(c)}$ и $\frac{f(b)}{f(c)}$, что возможно только при $\varphi(a) = \sin h(a)$. Поэтому вообще должно быть $\varphi(y) = \mathrm{tg}\Pi(y) = \sin hy$, или послѣ небольшихъ преобразованій:

$$\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\,\Pi(y) = e^{-y}$$

Это выраженіе дано Лобачевскимъ послѣ продолжительныхъ, весьма сложныхъ, хотя и болѣе прямыхъ геометрическихъ соображеній.

Перейдемъ теперь къ изученію зависимостей между сторонами и углами треугольника.



Фиг. 122.

Пусть ABC имѣетъ углы $A = \Pi(\alpha)$, $B = \Pi(\beta)$ и $C = \Pi(\gamma)$. На сторонѣ BC (фиг. 122) отложимъ отрѣзокъ $CD = \gamma$ и на сторонѣ AB отрѣзокъ $AE = \alpha$; изъ точекъ D и E возставимъ перпендикуляры DD' и EE' къ соотвѣтственнымъ сторонамъ и проведемъ прямую BB', параллельную прямой DD', а потому и EE'. Такимъ образомъ у насъ получаются углы $CBB' = \Pi(a-\gamma)$ и $ABB' = \Pi(c-\alpha)$,

связанные между собою соотношеніемъ $\Pi(\beta)=\Pi(a-\gamma)-$ $-\Pi(c-\alpha)$. Отрѣзки α и γ должны быть взяты съ обратнымъ знакомъ, если соотвѣтствующіе имъ углы будутъ тупые.

Съ помощью этого соотношенія могутъ быть найдены всѣ остальныя зависимости между сторонами и углами треугольника.

Если стороны какого-либо угла BAC (фиг. 121) пересѣчемъ двумя прямыми, перпендикулярными къ AB, то отношеніе меньшаго отрѣзка къ большему на этой сторонѣ будетъ больше отношенія соотвѣтствующихъ отрѣзковъ на другой сторонѣ.

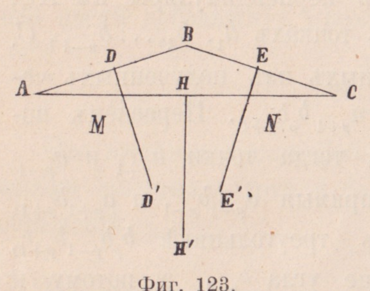
Чтобы убѣдиться въ этомъ, отложимъ на AC произвольное число равныхъ отрѣзковъ $Aa_1=a_1a_2=a_2a_3=\ldots=a_{n-1}C$ и изъ полученныхъ точекъ возставимъ перпендикуляры къ AC, которые пусть пересѣкутъ AC въ точкахъ $b_1, b_2, \ldots b_{n-1}, C$. Разсмотримъ два какихъ-либо смежныхъ изъ полученныхъ четыреугольниковъ: $a_{p-1}a_pb_{p-1}b_p$ и $a_pa_{p+1}b_pb_{p+1}$. Перегнемъ полученную фигуру по прямой a_pb_p; тогда точки a_{p+1} и a_{p-1} совпадутъ, а потому совпадутъ и прямыя $a_{p-1}b_{p-1}$ и $a_{p+1}b_{p+1}$. Въ полученномъ такимъ образомъ треугольникѣ $b_pb_{p-1}b_{p+1}$, очевидно, уголъ b_{p+1} будетъ меньше угла b_{p-1}, а потому и сторона $b_{p-1}b_p$ меньше стороны $b_pb'_{p+1}=b_p\,b_{p+1}$, такъ что отрѣзки эти возрастаютъ по мѣрѣ удаленія отъ точки A, откуда и слѣдуетъ высказанное предложеніе.

Примѣняя эту теорему къ прямоугольному треугольнику, найдемъ, что *квадратъ гипотенузы больше суммы квадратовъ катетовъ*. Изъ той же теоремы заключаемъ, *что разстояніе между двумя перпендикулярами къ одной прямой возрастаетъ по мѣрѣ удаленія ихъ отъ нея до безконечности. Разстояніе между двумя параллельными прямыми возрастаетъ въ одну сторону до безконечности, а въ другую убываетъ до нуля.*

Не останавливаясь на доказательствахъ этихъ предложеній, перейдемъ къ послѣднему предложенію седьмой главы:

Перпендикуляры, возставленные изъ срединъ сторонъ треугольника, могутъ пересѣкаться въ одной точкѣ, или вовсе не пересѣкаться, или быть параллельными. Если два изъ этихъ перпендикуляровъ пересѣкаются, то необходимо и третій пройдетъ чрезъ точку ихъ пересѣченія; это очевидно. Если эти перпендикуляры не пересѣкаются, то параллельность двухъ изъ нихъ влечетъ за собою и параллельность имъ третьяго.

Приведемъ доказательство этого предложенія только для одного случая, именно, когда углы A и C треугольника ABC (фиг. 123) острые и перпендикуляры изъ срединъ сторонъ его AB и BC параллельны. Эти перпендикуляры необходимо пересѣкаютъ сторону AC треугольника въ точкахъ M и N, лежащихъ съ разныхъ сторонъ средины ея H, такъ что перпендикуляръ, возставленный къ AC въ точкѣ H, долженъ лежать между ними, а такъ какъ онъ пересѣкаться ни съ однимъ изъ нихъ не можетъ, то онъ имъ долженъ быть параллеленъ.



Фиг. 123.

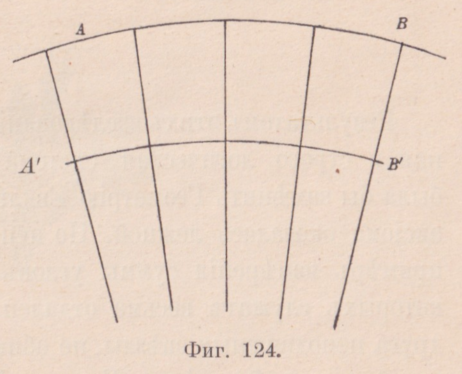
Послѣднее обстоятельство показываетъ, что *чрезъ три данныя точки не всегда можно провести кругъ, и что кругъ съ возрастаніемъ радіуса не можетъ стремиться къ прямой*, ибо иначе перпендикуляры къ одной прямой были бы параллельны.

Предѣльнымъ положеніемъ круга должна, слѣдовательно, служить какая-то другая линія, обладающая тѣмъ свойствомъ, что перпендикуляры изъ средины хордъ ея всѣ параллельны, другъ другу. Эту кривую Лобачевскій называетъ **предѣльною кривою,** перпендикуляры изъ средины хордъ ея—*осями предѣльной кривой*, поверхность, происшедшую отъ вращенія предѣльной кривой около одной изъ ея осей,—**предѣльной поверхностью.**

Вся восьмая глава посвящена именно изученію свойствъ этихъ предѣльныхъ линій и поверхностей.

Въ самомъ опредѣленіи предѣльной кривой уже указывается и способъ построенія. Именно, на данной прямой AB строимъ уголъ $\Pi(\alpha)$ при точкѣ A и на полученной прямой откладываемъ отрѣзокъ $AC = 2\alpha$; точка C будетъ лежать на предѣльной кривой. Такимъ образомъ по точкамъ можемъ построить и всю предѣльную кривую. Изъ самаго способа построенія ея видно, что дуги ея покрываютъ сами себя во всѣхъ частяхъ, и что кругъ не можетъ пересѣчь ее болѣе, чѣмъ въ двухъ точкахъ.

Подобными же свойствами должна обладать, конечно, и предѣльная поверхность. Плоскость, проходящая по оси поверхности, пересѣчетъ ее по предѣльной кривой, всякая другая плоскость — по кругу. Предѣльныя линіи на предѣльной поверхности играютъ ту же роль, какъ прямыя на плоскости и, такъ какъ сумма двугранныхъ угловъ, происходящихъ отъ пересѣченія трехъ плоскостей по прямымъ, параллельнымъ другъ другу, равна π, то сумма угловъ предѣльнаго треугольника равна π, такъ что на этой поверхности геометрія Евклида примѣнима вполнѣ и безъ всякихъ ограниченій.



Фиг. 124.

Въ заключеніе укажемъ еще одно метрическое свойство предѣльной кривой.

Пусть AB и $A'B'$—дуги предѣльныхъ кривыхъ (фиг. 124), пересѣченныя парою параллельныхъ прямыхъ AA' и BB'; покажемъ сначала, что отношеніе этихъ дугъ не зависитъ отъ ихъ длины. Для этого раздѣлимъ дугу AB на n равныхъ частей и чрезъ точки дѣленія A_1, A_2,... A_{n-1} проведемъ прямыя A_1A_1', A_2A_2'... $A_{n-1}A_{n-1}'$, параллельныя прямымъ AA' и BB'. Эти прямыя раздѣлятъ дугу $A'B'$ также на n равныхъ частей, ибо по свойству предѣльной кривой полоса $AA_1A_1'A'$ можетъ быть совмѣщена съ полосою $A_1A_2A'_2A'_1$ и съ каждою слѣдующею, при чемъ, слѣдовательно, будутъ совмѣщаться также и дуги $A'A_1'$, $A'_1A'_2$ и т. д. Отношеніе дугъ двухъ предѣль-

ныхъ кривыхъ между двумя параллельными прямыми зависитъ, слѣдовательно, только отъ разстоянія этихъ кривыхъ другъ отъ друга. Если это разстояніе будетъ x и если отношеніе двухъ дугъ, разстояніе между которыми равно единицѣ, примемъ за C, то это отношеніе будетъ выражаться числомъ C^x, при чемъ C должно быть необходимо больше единицы. Полагая $C^k = e$, гдѣ e— основаніе Неперовыхъ логариѳмовъ, можемъ представить это отношеніе въ видѣ

$$\frac{S}{S'} = \frac{AB}{A'B'} = e^{\frac{x}{k}}.$$

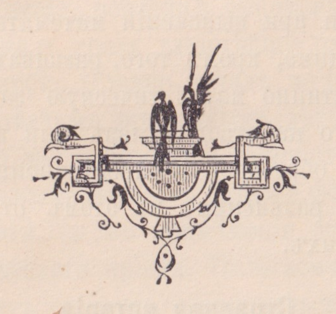
На этомъ и закончимъ изложеніе геометрическихъ изслѣдованій Лобачевскаго.

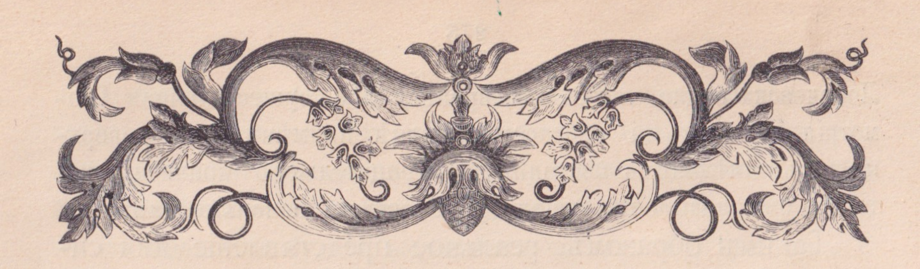
Результатомъ этихъ изслѣдованій явилась новая, вполнѣ стройная и строго логическая система Геометріи, которая должна была бы замѣнить Геометрію Евклида, если бы его одиннадцатая аксіома оказалась ложной. Но непосредственныя измѣренія, напримѣръ измѣренія суммы угловъ треугольниковъ, вершинами которыхъ служатъ весьма отдаленныя отъ насъ и другъ отъ друга неподвижныя звѣзды, не обнаруживаютъ замѣтныхъ отклоненій отъ этой аксіомы. Поэтому Геометрія Евклида вообще для любыхъ разстояній или по крайней мѣрѣ для разстояній, съ которыми намъ приходится имѣть дѣло, должна имѣть мѣсто безусловно.

Вопросъ о *реальномъ* существованіи Геометріи Лобачевскаго и о значеніи одиннадцатой аксіомы въ Геометріи Евклида оставался, слѣдовательно, открытымъ. Рѣшеніемъ этого вопроса первый началъ заниматься одинъ изъ наиболѣе выдающихся геометровъ послѣдняго времени, итальянскій ученый, профессоръ Beltrami, работы котораго и открываютъ собственно, нынѣ уже весьма обширную, область изслѣдованій по геометріи Лобачевскаго. Въ своемъ «Saggio di Interpretazione della Gometria non Euclidea», и затѣмъ въ «Teoria fondamedtale degli Spazii di Curvatura constante» въ 1868 году онъ показываетъ, что Геометрія

Лобачевскаго для двухъ измѣреній, т. е. существующая Геометрія Евклида на плоскости, вполнѣ примѣнима на поверхностяхъ, имѣющихъ постоянную отрицательную кривизну, которыя онъ называетъ **псевдосферическими поверхностями**.

Такимъ образомъ, реальное представленіе для системы Лобачевскаго, по крайней мѣрѣ для двухъ измѣреній, было найдено, а вмѣстѣ съ тѣмъ былъ рѣшенъ вопросъ о значеніи одиннадцатой аксіомы Евклида. Эта аксіома отличаетъ плоскость отъ псевдосферы.





Нѣкоторые фокусы.

Къ области здраваго развитія смекалки слѣдуетъ отнести умѣнье найтись не только при рѣшеніи какого либо хитроумнаго вопроса, или при выясненіи математическаго парадокса и софизма. Необходимо, кромѣ того, развивать въ себѣ навыкъ, чтобы различать истинно математическую задачу отъ простого *фокуса*, основаннаго на отводѣ глазъ или попросту иногда—обманѣ. Нѣсколько образцовъ распространенныхъ фокусовъ подобнаго рода мы и разъяснимъ въ этомъ отдѣлѣ, начиная съ простѣйшаго изъ нихъ.

Странная исторія.

На столѣ лежитъ 5 спичекъ (или иныхъ какихъ предметовъ) $\overset{1}{|}\ \overset{2}{|}\ \overset{3}{|}\ \overset{4}{|}\ \overset{5}{|}$ и въ каждой рукѣ держатъ по одной. Теперь разсказываютъ такую исторію:

Пять овецъ (5 спичекъ) паслись на лугу, а въ лѣсу находились 2 разбойника (показываютъ обѣ спички въ рукахъ). Разбойники украли овецъ одну за другой (берутъ № 1 лѣвой рукой, № 5 правой, № 2 лѣвой, № 4 правой, № 3 лѣвой). Въ это время пришелъ пастухъ, и разбойники отпустили овецъ обратно (кладутъ обратно на столъ 1 спичку изъ правой руки, 1 изъ лѣвой, 1 изъ правой, 1 изъ лѣвой, 1 изъ правой (Теперь въ лѣвой рукѣ находятся 2 спички, въ то время, какъ зрители считаютъ, что въ каждой рукѣ—по одной).

Пастухъ удалился, и разбойники опять забрали одну за другой всѣхъ овецъ (начинаютъ брать лѣвой рукой). Но въ это

время пришли солдаты, и разбойники убѣжали, оставивъ овецъ въ лѣсу. Открываютъ руки, и въ самомъ дѣлѣ: въ одной рукѣ 5 овецъ, въ другой 2 разбойника.

Эта веселенькая, хотя нѣсколько и странная, исторійка основана, очевидно, только на быстротѣ разсказа и постоянномъ подсовываніи внѣ очереди лѣвой руки вмѣсто правой. Какъ ни простъ этотъ «отводъ глазъ», но сначала онъ удивляетъ.

Феноменальная память.

Знаменитый «счетчикъ» Жакъ Иноди — производившій въ умѣ математическія дѣйствія надъ многозначными числами, обладалъ, прежде всего, поистинѣ феноменальной памятью чиселъ — онъ запоминалъ сразу длиннѣйшіе ряды цифръ и повторялъ ихъ безъ ошибки, словно читалъ по писанному. Здѣсь мы имѣемъ дѣло съ рѣдкимъ природнымъ даромъ. Совсѣмъ другое дѣло, когда такую же способность демонстрируютъ предъ публикой провинціальныхъ городовъ заѣзжіе фокусники. Здѣсь дѣло вовсе не въ памяти, а въ примѣненіи остроумнаго и крайне простого мнемоническаго пріема. Полагаемъ, что читателю небезынтересно будетъ съ нимъ ознакомиться, чтобы умѣть, при случаѣ, отличить истинную, природную способность отъ простой уловки.

Вотъ примѣръ. Фокусникъ диктуетъ вамъ нѣсколько длиннѣйшихъ рядовъ цифръ и затѣмъ безъ запинки повторяетъ ихъ сколько угодно разъ, не смѣшивая одного ряда съ другимъ и не пропуская ни одной цифры.

Весь секретъ въ томъ, что фокусникъ твердо выучилъ небольшую табличку, гдѣ каждой изъ 10-ти цифръ отвѣчаютъ опредѣленныя согласныя буквы. Для тѣхъ, кто пожелалъ бы самъ позабавить своихъ гостей рядомъ эффектныхъ фокусовъ, мы приводимъ ниже такую табличку. Въ ней стоящимъ наверху цифрамъ отвѣчаютъ по двѣ согласныхъ буквы.

0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
н	г	д	к	ч	п	ш	с	в	р
м	ж	т	х	щ	б	л	з	ф	ц

Для облегченія небезполезны будутъ кое-какія мнемоническія указанія. Что нулю соотвѣтствуетъ буква **н**, легко запомнить, **м** же похоже на **н** и стоитъ съ нимъ рядомъ въ алфавитѣ. **Г** похоже на единицу по начертанію, и часто при смягченіи переходитъ въ **ж**. Буква **д** выбрана для двойки, какъ начальная и часто произносится, какъ **т**. Буква **к** напоминаетъ три, потому что состоитъ изъ трехъ черточекъ; съ **х** она родственна, какъ гортанная. **Ч**—первая буква слова «четыре» и напоминаетъ **щ**. **П** — первая буква **пяти** и родственна **б**. Точно также **ш** напоминаетъ **шестерку** (**л** приходится просто запомнить), и **с**—семерку; **з**—родственна с. **В**—первая буква слова восемь, **ф**—родственна **в**. Наконецъ, **р** выбрана для девятки, такъ какъ напоминаетъ ее, если перевернуть ее на другой бокъ; **ц**—приходится выучить.

Какъ ни смѣшны могутъ показаться эти мнемоническія сближенія, они все же приносятъ огромное облегченіе. Зная ихъ, вы въ одну-двѣ минуты твердо выучите приведенную табличку и навѣрно провозитесь надъ ней цѣлый часъ, если пренебрежете ими.

Затвердивъ табличку, вы можете уже изумлять пріятелей вашей феноменальной памятью не хуже упомянутаго выше фокусника. Передъ тѣмъ, какъ продиктовать рядъ цифръ, вы вспоминаете какое-нибудь хорошо знакомое стихотвореніе и мысленно замѣняете въ немъ всѣ согласные звуки соотвѣтственными цифрами. Пусть вами выбраны слѣдующія четыре строки изъ Пушкина:

Поэтъ, не дорожи любовію народной.
Восторженныхъ похвалъ пройдетъ минутный шумъ,
Услышишь судъ глупца и смѣхъ толпы холодной,
Но ты останься твердъ, спокоенъ и угрюмъ.

Подставляя въ умѣ, вмѣсто согласныхъ, отвѣчающія имъ цифры, вы диктуете слѣдующіе ряды чиселъ:

5202916580920
87291003538659220020б0
7666721659703265362О
272072892753019О

Если васъ, спустя сколько угодно времени, попросятъ повторить продиктованные вами ряды цифръ, то зная, какими стихами вы пользовались, вы безошибочно воспроизведете всѣ четыре ряда. Если васъ попросятъ сразу сказать, напримѣръ, третій рядъ, то вы вспомните третью строчку («услышишь судъ глупца...») и тотчасъ же назовете всѣ цифры ряда.

«Математическое ясновидѣніе».

Заговоривъ о фокусахъ, разоблачимъ тайну еще одного весьма эффектнаго фокуса, которымъ ловкіе «престидижитаторы» часто морочатъ провинціальную публику. Мы говоримъ о такъ называемомъ «математическомъ ясновидѣніи», «мантевизмѣ», «чтеніи мыслей» и т. п. «нумерахъ», которые перечисляются въ программахъ подобныхъ сеансовъ. Обыкновенно дѣло происходитъ такъ. Фокусникъ выводитъ на эстраду свою «ясновидящую», усаживаетъ ее въ кресло и, для вящшей благонадежности, завязываетъ ей глаза. Затѣмъ онъ съ аспидной доской спускается въ зрительный залъ, ходитъ между креселъ и предлагаетъ зрителямъ самимъ написать какое-нибудь число, меньшее 1000. Когда число написано, фокусникъ, оставаясь среди зрителей, въ партерѣ, обращается къ ясновидящей съ просьбой назвать это число, и та тотчасъ же выкрикиваетъ съ эстрады это число, словно читая его по аспидной доскѣ.

Озадаченные зрители пишутъ второе, третье число, въ оба глаза слѣдятъ за фокусникомъ и «ясновидящей», но ничего подозрительнаго не открываютъ: фокусникъ спрашиваетъ, — «ясновидящая» отвѣчаетъ.

Ни ясновидѣнія, ни внушенія, ни чтенія мыслей здѣсь однако никакого нѣтъ. Просто-на-просто фокусникъ и его помощница твердо выучили уже приведенную выше табличку: обращаясь къ «ясновидящей» съ просьбой отгадать число, онъ ловко составляетъ фразу какъ разъ изъ такихъ словъ, первыя согласныя которыхъ означаютъ написанное зрителемъ число. Вотъ и вся тайна этого эффектнаго фокуса.

Теперь вы и сами сможете продѣлать его, разъ Колумбово яйцо уже поставлено. Вамъ необходимо только изощриться въ

составленіи соотвѣтствующихъ фразъ, въ быстромъ и ловкомъ подыскиваніи подходящихъ словъ, начинающихся съ требуемой согласной. Но прежде всего вы должны какъ-нибудь дать знать «ясновидящей» или «ясновидящему» сколько цифръ въ угадываемомъ числѣ: одна, двѣ или три. Дѣло въ томъ, что въ расчетъ принимаются всегда только первыя слова фразы, и «ясновидящая» должна знать, гдѣ остановиться.

Для этого фокусникъ обыкновенно пользуется опять-таки разъ навсегда условленными словами. Если задумано однозначное число, то онъ начинаетъ свое обращеніе къ помощницѣ всегда съ односложныхъ словечекъ: «А» или «Вотъ». Если написано двузначное число, то вопросъ начинается двусложнымъ обращеніемъ: «Ну-ка» или: «Еще». Наконецъ, при трехзначномъ числѣ никакихъ условныхъ обращеній не употребляютъ, такъ что отсутствіе въ началѣ вопроса перечисленныхъ четырехъ словъ указываетъ, что число трехзначное.

Теперь продѣлаемъ нѣсколько опытовъ. Пусть написано число 34; фокусникъ спрашиваетъ ясновидящую: «Ну-ка, какое число написалъ этотъ господинъ?» Слово «ну-ка» указываетъ, что число двузначное; **к**акое = 3, а **ч**исло = 4.

Пусть написано 92. Фокусникъ спрашиваетъ: «Еще разъ, дружокъ, отгадай-ка!» Еще—двѣ цифры; **р**азъ=9; **д**ружокъ=2.

Написано 4. Фраза: «А что написалъ теперь этотъ господинъ?» (А—одна цифра, что = 4).

Написано 207. Обращеніе: «Ты не устала? Какое же число сейчасъ написано?» (Отсутствіе условныхъ обращеній указываетъ на то, что число трехзначное; **т**ы=2, **н**е=0; **у**стала=7).

Какъ видитъ читатель изъ этихъ примѣровъ, составленіе подходящихъ обращеній—дѣло не Богъ вѣсть какое трудное. Навыкъ пріобрѣтается легко.

Часто фокусники нѣсколько видоизмѣняютъ опытъ: просятъ зрителя обозначить какое-либо дѣйствіе между двумя числами, и мнимая ясновидящая сразу произноситъ результатъ (если только онъ не больше тысячи). Зритель пишетъ, напримѣръ, 11 × 14. И ясновидящая сразу отвѣчаетъ 154. Зная секретъ «мантевизма», легко догадаться, что при этомъ фокусникъ сначала мысленно производитъ въ умѣ нужныя дѣйствія и затѣмъ

объясненнымъ выше уже способомъ сообщаетъ помощницѣ результатъ. Въ нашемъ примѣрѣ онъ можетъ обратиться къ ней такъ: «Голубушка, прикинь, что составляется изъ этихъ чиселъ?» (г = 1; п = 5; ч = 4).

Можно еще болѣе изумить публику, если заставить «ясновидящую» сообщать не только конечный результатъ, но и указать, отъ какого дѣйствія онъ полученъ—сложенія, вычитанія, умноженія или дѣленія. Для этого опять-таки прибѣгаютъ къ условнымъ обозначеніямъ. Именно, связываютъ съ тѣмъ или инымъ дѣйствіемъ опредѣленныя буквы, на этотъ разъ—гласныя: *о* обозначаетъ сл*о*женіе, *ы* или *и*—в*ы*ч*и*таніе, *ѣ* или *е*—д*ѣле*ніе, и, наконецъ, *у*—*у*множеніе.

Подобнымъ же образомъ «ясновидящая» можетъ угадывать, напр., день или годъ рожденія. Кто-нибудь изъ публики пишетъ эту дату на доскѣ, фокусникъ проситъ помощницу прочесть написанное и получаетъ вполнѣ точный отвѣтъ. Здѣсь число мѣсяца и годъ рожденія сообщаются ей, какъ и всякія другія числа, а мѣсяцъ—условной цифрой. Напр. 25 марта = = 25 и 3, такъ какъ мартъ третій мѣсяцъ.

Не имѣя никакого почти развивательнаго значенія, подобные «фокусы» способствуютъ однако навыку въ обращеніи съ числами. Поэтому разсмотримъ еще одинъ фокусъ. Разъ мы забрели въ этотъ уголокъ «царства смекалки», то ужъ осмотримъ его повнимательнѣе.

Угадываніе домино.

Этотъ салонный фокусъ обычно также выдаютъ за «чтеніе мыслей». Но «чтеніе мыслей» здѣсь такого сорта, что вы сами можете осуществить его, не обладая никакими сверхъестественными способностями.

Вы заявляете своимъ гостямъ, что беретесь отгадать задуманную ими плитку (или «костяшку») домино, находясь съ завязанными глазами въ дальнемъ углу залы или даже въ сосѣдней комнатѣ. И дѣйствительно, когда гости, выбравъ изъ груды игры любую плитку, спрашиваютъ васъ, какая взята,— вы сразу же отвѣчаете, хотя не можете видѣть не только домино, но даже гостей.

Объясненіе фокуса.

У васъ долженъ быть среди гостей сообщникъ, съ которымъ вы предварительно условились, что личныя и притяжательныя мѣстоименія будутъ означать опредѣленныя числа, именно:

я, мой—1	мы, нашъ—4
ты, твой—2	вы, вашъ—5
онъ, его—3	они, ихъ—6

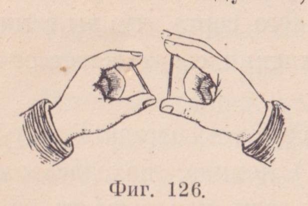
Пусть гости выбрали плитку $4/3$. Тогда вашъ сообщникъ обращается къ вамъ съ такою фразой: «Мы задумали плитку, отгадайте-ка ее!» Если нужно «протелеграфировать», напр., $1/5$, то вашъ сообщникъ, улучивъ моментъ, вставляетъ такую фразу: «А я думаю, что вы на этотъ разъ не угадаете». Фраза: «Ну, теперь у насъ такія плитки, что тебѣ ихъ не отгадать»—означаетъ $4/2$ и т. п.

Само собой понятно, что имѣютъ значеніе лишь первыя два мѣстоименія. Для обозначенія бѣлаго (нулевого) поля также выбираютъ какое-нибудь слово, напр. сударь: «отгадайте-ка, сударь, что мы тутъ задумали»,—будетъ означать $0/4$.

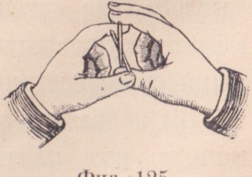
Какъ ни просты секреты этихъ фокусовъ,—ихъ, все же, трудно разгадать. Нужно обладать большой смёткой, чтобы догадаться, къ какой уловкѣ прибѣгъ фокусникъ.

Хитрая механика!

Вотъ еще два фокуса, при ловкомъ исполненіи которыхъ иной можетъ подумать, что здѣсь и въ самомъ дѣлѣ таится какая либо «хитрая механика».



Фиг. 126.

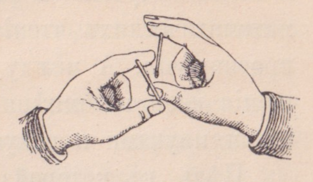


Фиг. 125.

Между указательнымъ и большимъ пальцами каждой руки я держу по спичкѣ—спичку въ лѣвой рукѣ горизонтально, въ правой вертикально; я приближаю руки другъ къ другу такъ, чтобы спички скрестились (фиг. 125). Теперь я дѣлаю быстрое

движеніе руками... и спички опять образуютъ крестъ, но теперь горизонтальная спичка находится по другую сторону вертикальной (фиг. 126). Снова дѣлаю движеніе руками, и спички снова находятся въ первоначальномъ положеніи. Можно повторить этотъ фокусъ нѣсколько разъ, но никто не можетъ понять, какъ это дѣлается.

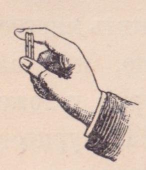
Этотъ фокусъ, требующій предварительнаго небольшого упражненія, производится слѣдующимъ образомъ. Вертикальная спичка помѣщается головкой внизъ, такъ что послѣдняя покоится на большомъ пальцѣ, въ то время какъ указательный палецъ опирается о другой ея конецъ. При небольшомъ сдавливаніи этихъ пальцевъ спичка пристаетъ къ указательному пальцу. Теперь стоитъ только слегка раздвинуть пальцы, и спичка удерживается однимъ указательнымъ пальцемъ—какъ бы виситъ на немъ (фиг. 527). Черезъ полученный такимъ образомъ маленькій прозоръ между спичкой и большимъ пальцемъ вы быстро и незамѣтно для другихъ вводите и выводите горизонтальную спичку, всякій разъ тотчасъ же закрывая отверстіе.



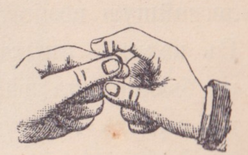
Фиг. 127.

* *
*

По серединѣ двухъ спичекъ проводятъ поперечную черту. Большимъ и указательнымъ пальцами правой руки берутъ спички такъ, чтобы обѣ черты были видны сверху (фиг. 128), вслѣдъ затѣмъ тѣми же пальцами лѣвой руки поворачиваютъ эти спички на полъ-оборота вокругъ ихъ короткой оси (т. е., принимая черту за ось вращенія) такъ, что пальцы правой руки будутъ уже касаться противоположныхъ концовъ спичекъ (фиг. 129). Теперь спрашиваютъ: «черточки сверху или снизу?» Всякій отвѣтитъ: «снизу», и ошибется, если, поворачивая спички вокругъ ихъ короткой оси, вы въ то же время, въ пальцахъ лѣвой руки, незамѣтно повернете ихъ вокругъ длинной оси (т. е. оси, параллельной длинѣ спичекъ).



Фиг. 128.



Фиг. 129.

Математика, какъ упражненіе въ искусствѣ хорошо говорить.

Цѣнность перевода съ иностраннаго языка заключается въ умѣніи проникать въ тайники мысли, изложенной на чужомъ языкѣ. Цѣнность рисованія состоитъ въ наглядномъ изображеніи точныхъ соотношеній частей и перспективы. Цѣнность естествознанія—въ развитіи независимости мысли. Всѣ эти положенія извѣстны приступающимъ къ изученію пріемовъ краснорѣчія, къ выработкѣ въ себѣ умѣнья говорить плавно, убѣдительно и красиво. Начинающіе свою жизненную карьеру часто говорятъ о пользѣ изученія перечисленныхъ наукъ. Но рѣдко слышно о математическихъ чтеніяхъ и упражненіяхъ, какъ объ образцахъ краснорѣчія. А между тѣмъ математика имѣетъ въ этомъ отношеніи свои несомнѣнныя преимущества передъ всѣми названными науками и искусствами.

Цѣль, къ которой долженъ стремиться говорящій, состоитъ въ томъ, чтобы заставить другихъ сосредоточить все свое вниманіе на мысли и убѣжденіи оратора, заставить ихъ отвлечься отъ ихъ собственной личности. И ни въ одной аудиторіи, можетъ быть, не достигается эта цѣль легче, чѣмъ въ аудиторіи математика.

Сжатость разсужденія, точность доказательства, изображеніе необходимыхъ выводовъ изъ данныхъ предположеній приковываютъ и сосредоточиваютъ всѣ умственныя силы какъ объясняющаго, такъ и слушающаго.

Въ какихъ иныхъ случаяхъ изучающій инстинктивно найдетъ легчайшую возможность въ немногихъ словахъ изложить многое? Въ какихъ иныхъ обстоятельствахъ, слѣдовательно, простая, не бьющая на эффектъ, но легкая и красивая форма изложенія будетъ такъ умѣстна и плодотворна, какъ здѣсь? Вычурность и аффектація, какъ результаты дурной привычки рисоваться, не имѣютъ здѣсь мѣста и потому быстро исчезаютъ! Между тѣмъ всѣ другія особенности умѣнья говорить находятъ здѣсь примѣненіе и постепенно развиваются при общемъ и связномъ теченіи мыслей объясняющаго и слушателей.

Одинъ наблюдатель, самъ математикъ, говоритъ, что ему удалось отмѣтить не болѣе двухъ примѣровъ вычурности въ

чтенія и изложеніи лекцій по математикѣ. И въ обоихъ случаяхъ эта манера постепенно и незамѣтно исчезла. Въ одномъ случаѣ женщина-лекторъ сдѣлала введеніе въ курсъ очень манерно и вычурно, но тотчасъ же невольно перешла на совершенно другой тонъ, такъ какъ слушатели обратили ея вниманіе нѣкоторыми вопросами на сущность предмета и заставили ее сосредоточить всѣ силы ума, чтобы объяснить все понятно.

Постоянная необходимость объяснительныхъ чертежей пріучаетъ лектора и слушателя также къ иллюстраціи своихъ мыслей.

Эффектъ математическаго краснорѣчія долженъ заключаться въ ясномъ, сжатомъ и точномъ выводѣ изъ извѣстныхъ фактовъ. Къ такимъ пріемамъ и къ такому образу мышленія долженъ пріучаться математикъ-ораторъ.

Было бы, пожалуй, хорошо, если бы во всѣхъ нашихъ школахъ,—не только такъ называемыхъ «точныхъ» наукъ, но и въ школахъ или обществахъ, обучающихъ краснорѣчію, было написано извѣстное изреченіе Платона: «Пусть не входитъ сюда никто не знакомый съ геометріей!»

Прежній абакъ и новыя цифры.

исунокъ изъ «Margarita Philosophica» (1593 г.).

ОГЛАВЛЕНІЕ.